No.
Date

Thom類とPoincaré双対 (de Rhamコホモロジー, Bott–Tu §5-6, §12)

M^m: C^∞ mfd, 向き付けられている

$S^s \subset M$ 閉部分多様体; 向き付けられている

・ Poincaré双対性
$$H^p_c(M) \otimes H^{m-p}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\alpha \otimes \beta \longmapsto \int_M \alpha \wedge \beta$$
は非退化 (cはコンパクト台 de Rham coh を表す)

・ $S^s \subset M$ oriented closed submfd
$$H^s_c(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$[\alpha] \longmapsto \int_S \alpha$$

「Sが閉」が必要
↓
$\mathrm{Supp}(\alpha|_S)$ は Mの閉部分集合で $\mathrm{Supp}\,\alpha$ に含まれるのでコンパクト

に対応する class $\eta_S \in H^{m-s}(M)$

がー意に存在する

$$\int_S \alpha = \int_M \alpha \wedge \eta_S \qquad \forall \alpha \in H^s_c(M)$$

η_S を SのPoincaré双対という

(注) さらに Sがコンパクトのときは コンパクトPoincaré双対 $\eta_{S,c} \in H^{m-s}_c(M)$ が定まる
$$\int_S \alpha = \int_M \alpha \wedge \eta_{S,c} \qquad \forall \alpha \in H^s(M)$$

No.

Date

管状近傍定理 (tubular nbd)

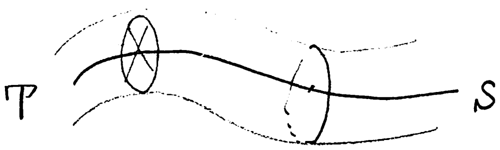
$$N = N_{S/M} := TM|_S / TS \quad \text{normal bundle}$$

SのMにおける開近傍Tと微分同相写像

$$\phi : N \xrightarrow{\cong} T \subset M$$

であって $\phi|_S = id_S$ なるものが存在する (S ⊂ N は零切断)

(Tを管状近傍という)



- 服部晶夫「多様体」
- Guillemin-Pollack 微分位相幾何学 Differential Topology (ε-neighborhood theorem)

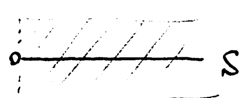
- 以下 Nに計量を入れて

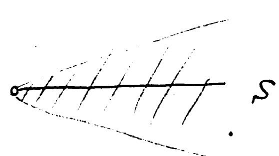
$$D(N) = \{ v \in N \mid \|v\| \leq 1 \} \quad \text{disc bundle}$$

D(N)はMの中で閉と仮定する。

(このようにTをとることができる。Sがコンパクトのときは自動的)

$M = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $S = \mathbb{R}_{>0}$ のとき





- normal bundle の向き付け

$$0 \to TS \to TM|_S \to N \to 0$$

No.

Date

$\rightsquigarrow \quad TM|_S \cong TS \oplus N$

この同型が向きを保つように N に向きが入る

定理 $\Theta \in \Omega_{cv}^{m-k}(N)$: N の Thom form ($\mathrm{Supp}\,\Theta \subset D(N)$ と仮定してよい)

$j : N \cong T \hookrightarrow M$ 包含写像

$j_*\Theta$: Θ を T の外で零で拡張したもの ($D(N)$: M内で閉ゆえ smooth)

$\Longrightarrow$ S の Poincaré dual は $j_*\Theta$ で代表される

(S がコンパクトのときは compact Poincaré dual も代表する)

(∵) ${}^\forall\alpha \in \Omega_c^{m-k}(M)$ $\quad d\alpha = 0$ に対して

$$\int_M \alpha \wedge j_*\Theta = \int_S \alpha \quad \text{を示す}$$

・ $t > 0$ に対して $t : N \longrightarrow N \quad (v \longmapsto tv)$ を考える

$\Theta^{(t)} = t^*\Theta$ は $\frac{1}{t}D(N)$ に台が含まれる Thom form

$t \to \infty$ で零切断のデルタ関数に近づく

・ $[j_*\Theta] = [j_*\Theta^{(t)}]$ in $H^{m-k}(M)$ ゆえ

$$\int_M \alpha \wedge j_*\Theta = \int_M \alpha \wedge j_*\Theta^{(t)} = \int_N \alpha \wedge \Theta^{(t)}$$

右辺は t によらない　これを $t \to \infty$ の極限で計算

No.

Date

$\{U_i\}$: Sの座標近傍による open covering

s.t. $N|_{U_i} \cong U_i \times \mathbb{R}^{m-s}$ 自明化

ρ_i : 対応する1の分割 （N上に引き戻しておく）

$$\int_N \alpha \wedge \Theta^{(t)} = \sum_i \int_{N|_{U_i}} \rho_i \alpha \wedge \Theta^{(t)}$$

$D(N) \cap \mathrm{Supp}\,\rho_i \cap \mathrm{Supp}\,\alpha \neq \phi$

なる i は有限コ

（$\mathrm{Supp}\,\alpha$ はコンパクトで $\{\mathrm{Supp}\,\rho_i\}$ は locally finite）

$N|_{U_i} \cong U_i \times \mathbb{R}^{m-s}$

$(x_1, \cdots, x_s, y_1, \cdots, y_{m-s})$ 座標

$$\Theta = \sum \theta_{I,J}(x, y)\, dx^I \wedge dy^J$$

と座標表示

$$\rho_i \alpha = \sum \alpha_{I,J}(x, y)\, dx^I \wedge dy^J$$

$$\int_{N|_{U_i}} \rho_i \alpha \wedge \Theta^{(t)} = \sum_{I,J} \int_{U_i \times \mathbb{R}^{m-s}} \alpha_{I,J}(x, y)\, \theta_{I^c, J^c}(x, ty)\, (\pm 1)\, t^{|J^c|}\, d^s x\, d^{m-s} y$$

$$= \sum_{I,J} \int_{U_i \times \mathbb{R}^{m-s}} \alpha_{I,J}\left(x, \frac{y}{t}\right) \theta_{I^c, J^c}(x, y)\, \frac{\pm 1}{t^{|J|}}\, d^s x\, d^{m-s} y$$

$t \to \infty$ で $J = \phi$ のときのみ寄与 （このとき $J^c = \{1, \cdots, m-s\}$, $I^c = \phi$
$I = \{1, \cdots, n\}$）

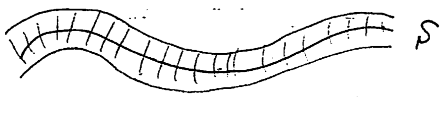
で符号 ± 1 は 1

$$\xrightarrow{t\to\infty} \int_{U_i\times\mathbb{R}^{m-k}} \alpha_{\{1,\dots,k\},\phi}(x,0)\ \underline{\theta_{\phi,\{1,\dots,m-k\}}(x,y)}\ d^k x\, \underline{d^{m-k} y}$$

$$= \int_{U_i} \rho_i \alpha \Big|_S$$

iについて足すと $\int_S \alpha$ を得る

//



SのPoincaré dual η_S は Sのいくらでも近くに台をもつようにとれる．

（Sに沿ったデルタ関数）

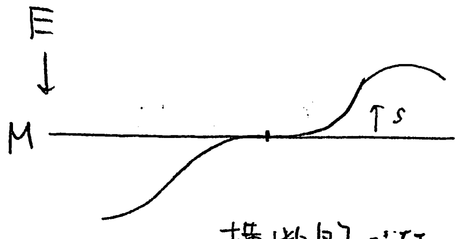
<u>transversal section</u>

$E \to M$　C^∞級実ベクトル束

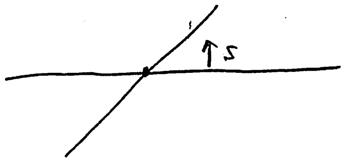
section $s: M \to E$ が transversal 横断的 $\Longleftrightarrow$ sが零切断 $M \hookrightarrow E$ と横断的

$\Longleftrightarrow$ $\forall x \in s^{-1}(0)$ に対して

$$\mathrm{Im}(d_x s: T_x M \to T_x E) + T_x M = T_x E$$



横断的でない



横断的

No.

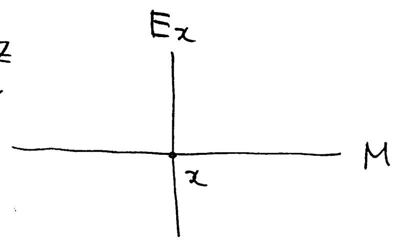
Date

Prop $s : M \to E$ transversal section

(1) $Z = s^{-1}(0)$ は部分多様体

(2) $0 \to TZ \to TM|_Z \xrightarrow{ds} E|_Z \to 0$ exact.

特に $N_{Z/M} \cong E|_Z$



∵ (1) は多様体論の内容

(2) $\forall x \in s^{-1}(0) = Z$ に対して

$$d_x s : T_x M \longrightarrow T_x E \cong T_x M \oplus E_x \xrightarrow[pr_2]{} E_x$$

s が transversal $\Rightarrow$ $d_x s$ は全射.

さらに $T_x Z = \mathrm{Ker}(d_x s)$

注 零切断
$x \in M$ に対しては $T_x E \cong T_x M \oplus E_x$ (canonical な分解)

一般の $x \in E$ に対しては canonical な分解はない.

(接続 $\Rightarrow$ 分解を与える)

$Z = s^{-1}(0)$ の向き付け

M: 向き付けられた多様体

$E \to M$: 向き付けられたベクトル束

$$\Rightarrow \quad TM|_Z \cong TZ \oplus E|_Z, \quad N_{Z/M} \cong E|_Z$$

が向きを保つように Z 及び $N_{Z/M}$ の向きを定めておく

定理 M: oriented mfd

$E \to M$ oriented real vector bundle $\operatorname{rank} E = k$

$s: M \to E$ transversal section

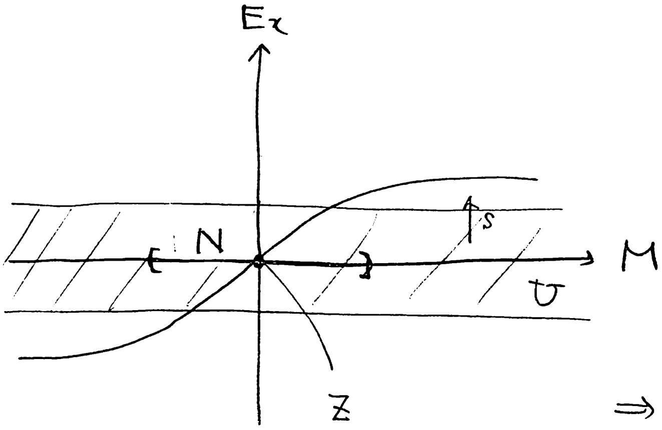
$Z = s^{-1}(0)$

$$\Longrightarrow \quad \eta_Z = e(E) \quad \text{in } H^k(M) \qquad (k = \operatorname{codim} Z)$$

∵ $N = N_{Z/M} \subset M$ Zの管状近傍をとる

零切断 $M \subset E$ の近傍 U を十分小さくとると

$s^{-1}(U) \subset D(N)$ となるようにとれる



さらに E の Thom form Θ を

(必要ならば fiber 方向の rescale により)

$\operatorname{Supp} \Theta \subset U$ となるようにとれる

$\Rightarrow$ $s^*\Theta$ の台は $D(N)$ に含まれる

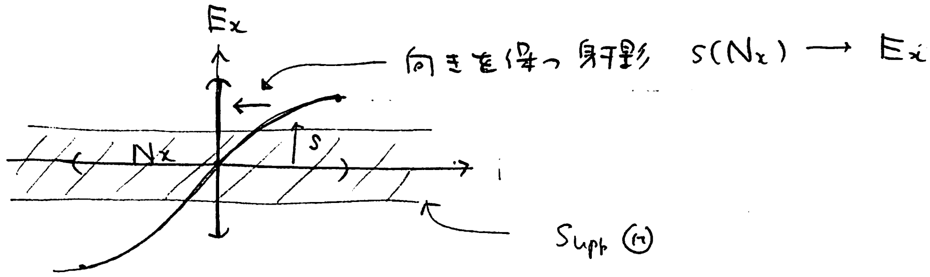
Euler類の定義より $e(E) = [s^*\Theta]$ であった。

$s^*\Theta$ が N の Thom form であることを示せばよい。

つまり $\forall x \in Z$ に対して $\displaystyle\int_{N_x} s^*\Theta = 1$ を示せばよい。

No.

Date



$$\int_{N_x} s^*\Theta = \int_{s(N_x)} \Theta = \int_{E_x} \Theta = 1$$

$s(N_x)$ と E_x は ホモトピーでつなげられる（向きを保って）

（$E|_{N_x} \cong N_x \times E_x$ （自明に）をつかって ホモトピーが作れる）

//

注　E は 零切断 M の 管状近傍 なので Thom form Θ は M の E における Poincaré dual を与えている　$\eta_M = [\Theta] \in H^k(E)$

ということに注意すれば 上の定理 は この事実からも従う.

定理　$f: M \longrightarrow N$　C^∞ map,　M, N は向き付けられている

$S \subset N$, 向き付けられた閉部分多様体

$f \pitchfork S$　（f は S と横断的,　$\mathrm{Im}(d_x f) + T_{f(x)}S = T_{f(x)}N$　$(\forall x \in f^{-1}(S))$）

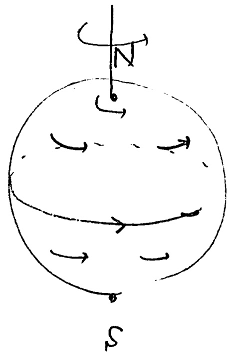
$$\Longrightarrow \quad \eta_{f^{-1}(S)} = f^*\eta_S$$

（但し $f^{-1}(S)$ には同型 $N_{f^{-1}(S)/M} \cong f^*N_{S/N}$ を通じて向きを入れる）

問　この定理を示せ

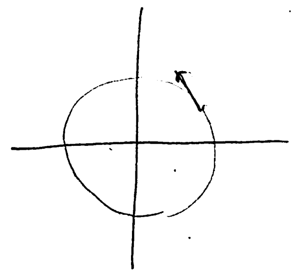
例

$TS^2 \to S^2$ の section s : ある軸に関する回転を与えるベクトル場



$s^{-1}(0) = \{N, S\}$

N と S に誘導される向き = 1



N のまわり ベクトル場は $-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$

$(x, y) \longmapsto (-y, x)$ 向きを保つ

S のまわり も同様

よって $e(TS^2) = \eta_{\{N,S\}}$

$$\int_{S^2} e(TS^2) = \int_{S^2} 1 \wedge \eta_{\{N,S\}} = \int_{\{N,S\}} 1 = 2 \quad //$$

$E \to M$ 向き付けられたベクトル束 $m = \dim M = \operatorname{rank} E$ とする

M: コンパクト, 向き付けられている

$s: M \to E$ section $s^{-1}(0)$ が有限集合とする

<u>点 $x \in s^{-1}(0)$ での重複度</u>

点 x を中心とする ball B で s は $B \setminus \{x\}$ 上で消えていないものをとる. $E|_B \cong B \times \mathbb{R}^m$ (向きを保つ自明化)

をとって s を $s: B \to \mathbb{R}^m$ と見なす

No.

Date

このとき　$\frac{s}{\|s\|} : \partial B \longrightarrow S^{m-1}$　が定まる

↑ Bから誘導される向き　　　← D^m の境界の向き

$\mathrm{mult}_x s := \frac{s}{\|s\|}$ の写像度

定理　上の設定で　$\displaystyle\int_M e(E) = \sum_{x \in s^{-1}(0)} \mathrm{mult}_x s$

∵　Θ : E の Thom form

$s^{-1}(0) = \{x_1, \cdots, x_m\}$

B_i : 各 x_i 中心の closed ball（互いに交わらないもの）

$s^{-1}(\mathrm{Supp}\,\Theta) \subset \mathring{B}_1 \cup \cdots \cup \mathring{B}_m$　となるように Θ をとり直せる

$$\int_M e(E) = \int_M s^* \Theta$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \boxed{\int_{B_i} s^* \Theta}$$

← これが $\mathrm{mult}_{x_i}(s)$ になることを示せばよい

$E|_{B_i} \cong B_i \times \mathbb{R}^m$　　$\pi_2 : B_i \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 射影

$\theta \in \Omega_c^m(\mathbb{R}^m)$ を $\int_{\mathbb{R}^m} \theta = 1$ で, $\mathrm{Supp}\,\theta \subset D^m$ なるものとする.

$\pi_2^* \theta$ と Θ は共に $E|_{B_i}$ の Thom form を与えるから

$$\Theta = \pi_2^* \theta + d\beta \qquad \exists \beta \in \Omega_{cv}^{m-1}(E|_{B_i})$$

No.

Date

- ここで $R>1$ を十分大きくとり、$\mathrm{Supp}(\beta)$ が $B_i \times D^m_R$ に

含まれるとする。（$D^m_R = \{ x \in \mathbb{R}^m \mid |x| \leqq R \}$）

s を $t \cdot s$ $(t \gg 1)$ におきかえて $s|_{\partial B_i}$ のノルムが常に $2R$

より大きいと仮定できる。

このとき、

$$\int_{B_i} s^* \Theta = \int_{B_i} s^*(\pi_2^* \theta + d\beta)$$

$$= \int_{B_i} (\pi_2 \circ s)^* \theta + \underbrace{\int_{\partial B_i} s^* \beta}_{}$$

$s(\partial B_i)$ 上では $\beta = 0$ より消える

- $\pi_2 \circ s$ を改めて s と書き、

$\theta = d\sigma$ なる $(m-1)$ form $\sigma \in \Omega^{m-1}(\mathbb{R}^m)$ をとると、

$$= \int_{B_i} s^*(d\sigma) = \int_{\partial B_i} s^* \sigma$$

- $s|_{\partial B_i}$ と $\left.\frac{s}{\|s\|}\right|_{\partial B_i}$ はホモトピックで ホモトピーの像の上で

σ は closed であるから

$$= \int_{\partial B_i} \left(\frac{s}{\|s\|}\right)^* \sigma$$

$\int_{S^{m-1}} \sigma = \int_{D^m} d\sigma = \int_{D^m} \theta = 1$ ゆえ σ は $H^{m-1}(S^{m-1})$ の generator

であってこれは $\mathrm{mult}_{x_i}(s)$ に等しい //