No.

Date

<u>全射性</u> $\varepsilon = \{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\} \in \check{C}^2(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$ をとる

$\varepsilon \in \check{C}^2(\mathcal{U}, \mathcal{C}^0)$ と見ると $\exists \varphi \in \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{C}^0)$

s.t $\varepsilon = \frac{1}{2\pi}\delta\varphi$

$g_{\alpha\beta} = e^{\sqrt{-1}\varphi_{\alpha\beta}}$ とおけば $g_{\alpha\beta}$ は cocycle 条件を満たす

ので 主S^1束を定める

//

Euler類のさらに別の定義

- Thom類の引き戻し
- sheaf cohomology
- 分類空間を使う

etc

$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{C}^0 \xrightarrow{\exp(2\pi i\,\cdot)} \mathcal{C}^0(\cdot, S^1) \to 1$

の長完全列の連結準同型

$H^1(X, \mathcal{C}^0(\cdot, S^1)) \to H^2(X, \mathbb{Z})$

$\quad\quad$ 主S^1束 $\longmapsto e$

2021/6/1

<u>Thom同型とEuler類</u> [Bott-Tu] §6, §12 [de Rham cohomology で考える]

M C^∞ mfd, $E \to M$ 実ベクトル束 (rank n)

- Cohomology of compact support in the vertical direction

$$\Omega^*_{cv}(E) = \{\omega \in \Omega^*(E) \mid \mathrm{Supp}\,\omega \to M \text{ は proper}\}$$

$$H_{cv}^*(E) := H^*(\Omega_{cv}^*(E), d)$$

<u>Def</u> $E \to M$ が<u>向き付けられた</u>実ベクトル束

$\Longleftrightarrow$ 各 fiber E_x に向きが与えられており、それが局所的に一定

つまり $\forall x \in M$, $\exists U$: x の open nbd, $\exists E|_U \cong U \times \mathbb{R}^n$ 自明化

s.t. $\forall y \in U$ に対して E_y の向きは自明化を通じて $\mathbb{R}^n$ の標準的な向きと一致する

(注) $E \to M$ の向きを与える

$\Longleftrightarrow$ 変換関数が $GL_n^+(\mathbb{R}) = \{ g \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det g > 0 \}$ に値をとるような自明化の族を与える

(構造群の $GL_n^+(\mathbb{R})$ への reduction)

(Thom 同型)

<u>定理</u> $\pi : E \to M$ 向き付けられた rank n の実ベクトル束

(1) integration along the fiber (ファイバーに沿った積分)

$$\pi_* : H_{cv}^{p+n}(E) \xrightarrow{\cong} H^p(M) \quad \text{は同型}$$

(2) 特に $\exists! [\Theta] \in H_{cv}^n(E)$

$$\pi_* \Theta = 1 \quad (\text{つまり} \int_{E_x} \Theta = 1 \quad (\forall x \in M))$$

$[\Theta]$ を Thom class, Θ を Thom form という

(3) 逆写像は

$$\begin{array}{ccc} H^p(M) & \longrightarrow & H_{cv}^{p+n}(E) \\ \alpha & \longmapsto & \pi^*\alpha \wedge \Theta \end{array}$$

で与えられる

No.

Date

Recall : $H_c^*(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & * = n \\ 0 & * \neq n \end{cases}$

$$\begin{array}{ccc} H_c^n(\mathbb{R}^n) & \cong & \mathbb{R} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \omega & \longmapsto & \int_{\mathbb{R}^n} \omega \end{array}$$ によって与えられた

各 fiber E_x の向き $\leftrightsquigarrow$ $H_c^n(E_x)$ の生成元 ω で $\int_{E_x} \omega > 0$ なるものを与える.

局所的には $E|_U \cong U \times \mathbb{R}^n$

$$H_{cv}^*(E|_U) = H_{cv}^*(U \times \mathbb{R}^n) \xrightarrow{\cong} H^{*-n}(U) \quad (\text{Poincaré Lemma})$$

$$\alpha \longmapsto \pi_* \alpha$$

$$\beta \wedge \phi(t)\,dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n \longleftarrow\!\!\!\mapsto \beta$$

$$\left[\phi(t) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \int \phi(t)\,dt_1 \cdots dt_n = 1 \right]$$

特に

$$\begin{array}{ccc} H_{cv}^n(E|_U) & \cong & H^0(U) \quad (\cong \mathbb{R} \text{ if } U\text{: connected}) \\ \rotatebox{90}{$\cong$} & & \\ H_c^n(E_x) & & \forall x \in U \end{array}$$

• $\bigcup_{x \in M} H_c^n(E_x)$ は局所系 (local system) をなす

[ベクトル空間の局所系とは ベクトル束であって 変換関数が局所定数関数となるような自明化の族を持つもの (flat vector bdle ともいう)

今の場合は 変換関数 $g_{\alpha\beta} = \pm 1$

$E \to M$ を向き付ける $\Longleftrightarrow$ 局所系 $\bigcup_x H^n_c(E_x)$ を自明化する

(Thom同型定理の証明)

$M = \bigcup_\alpha U_\alpha$ good open covering

Čech-de Rham cpx $K^{p,q} = \check{C}^p(\pi^{-1}\mathcal{U}, \Omega^q_{cv})$

$$= \prod_{\alpha_0<\alpha_1<\cdots<\alpha_p} \Omega^q_{cv}(\pi^{-1}U_{\alpha_0\cdots\alpha_p})$$

- Čech 微分 δ : (1の分割を使うと) $p=0$ のみにコホモロジーがある

$\Longrightarrow$ (以前のProp) $H^*(K^\cdot, D) \cong H^*(\Omega^*_{cv}(E), d) = H^*_{cv}(E)$

- de Rham 微分 d : $q=n$ のみに cohomology がある (Poincaré Lemma)

$$H^*(\Omega^*_{cv}(\underbrace{\pi^{-1}U_{\alpha_0\cdots\alpha_p}}_{\substack{\cong \\ U_{\alpha_0\cdots\alpha_p}\times\mathbb{R}^n}}), d) = H^*_{cv}(U_{\alpha_0\cdots\alpha_p}\times\mathbb{R}^n)$$

$$\underset{\phi}{\cong} H^{*-n}_{cv}(U_{\alpha_0\cdots\alpha_p}) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & *=n \\ 0 & *\neq n \end{cases}$$

[向きの決める同型]

つまり d でコホモロジーをとると $H^q_d(K^{p,\cdot}) = \begin{cases} \prod_{\alpha_0<\cdots<\alpha_p} \mathbb{R} & q=n \\ 0 & q\neq n \end{cases}$

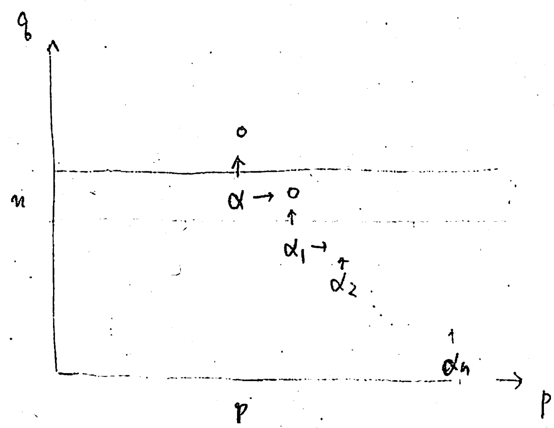
さらに δ でコホモロジーがとれる $H^p_\delta H^n_d(K^{\cdot,\cdot}) \cong \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathbb{R})$

Prop この状況で $H^{p+n}(K,D) \cong H^p_\delta(H^n_d(K^{\cdot,\cdot}))$

(spectral sequence の特別な場合)

∵ $H^p_\delta H^n_d \longrightarrow H^{n+p}(K,D)$ の作り方

$d = \pm D''$ $\uparrow$



$[\alpha] \in H^p_\delta H^n_d \qquad d\alpha = 0$

$\delta\alpha = 0 \text{ in } H^n_d = H^n_{D''}$

ゆえ $\delta\alpha = -D''\alpha_1 \qquad \alpha_1 \in K^{p+1,n-1}$

$D(\alpha+\alpha_1) = \delta\alpha_1 \in K^{p+2,n-1}$

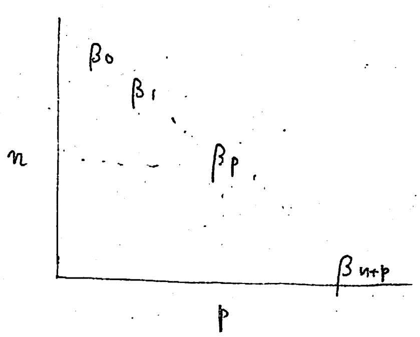
$D''\delta\alpha_1 = -\delta D''\alpha_1 = \delta(\delta\alpha) = 0$

より $\exists\, \alpha_2 \in K^{p+2,n-2} \qquad \delta\alpha_1 = -D''\alpha_2$

これを続けて D-cocycle $\alpha+\alpha_1+\cdots+\alpha_n$ を得る

とり方によらないことが check できる

逆に $(n+p)$次 D-cocycle が与えられたら



$\beta = \beta_0 + \cdots + \beta_{n+p} \qquad \beta_i \in K^{i,n+p-i}$

$D''\beta_0 = 0$ より $\exists\gamma \quad \beta_0 = D''\gamma$

β_0 をけしていって $\tilde\beta_p + \cdots + \tilde\beta_{n+p}$ の形にできる。

詳細は演習とする

$\tilde\beta_p \in H^p_\delta H^n_d$

2つの同型を合わせて

$$H^{p+n}_{cv}(E) \cong H^{p+n}(K^*, D) \equiv H^p_\delta H^n_d(K^{\cdot\cdot}) \cong H^p_{\check{C}ech}(M)$$

- この同型が integration along the fiber $H^{p+n}_{cv}(E) \xrightarrow{\pi_*} H^p(M)$ で与えられることを示す

$K^{p,q}_M = \check{C}^p(\mathcal{U}, \Omega^q)$: Mの Čech-de-Rham complex

$$\pi_*: K^{p,q+n} = \check{C}^p(\pi^{-1}\mathcal{U}, \Omega^{q+n}_{cv}) \longrightarrow \check{C}^p(\mathcal{U}, \Omega^q) = K^{p,q}_M$$

$$\{\omega_{\alpha_0 \dots \alpha_p}\} \longmapsto \{\pi_* \omega_{\alpha_0 \dots \alpha_p}\}$$

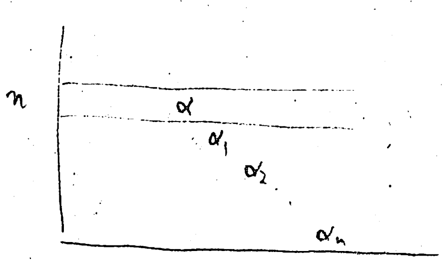
が定まり δ 及び d と可換になる

コホモロジーに誘導される写像

$$H^*(K, D) \longrightarrow H^{*-n}(K_M, D)$$ を見る

- sub complex $(\Omega^*_{cv}(E), d)$ 上では通常の de Rham 理論における fiberに沿った積分 $(\Omega^*_{cv}(E), d) \longrightarrow (\Omega^{*-n}(M), d)$ と一致

- $H^p_\delta H^n_d(K^{\cdot\cdot})$ の元 $[\alpha]$ を D-cocycle $\alpha + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ に拡張したものに対しては isom $H^p_\delta H^n_d(K^{\cdot\cdot}) \cong H^p_{\check{C}ech}(M)$ と一致



$$\pi_*(\alpha + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n) = \pi_* \alpha$$

• 同型により $\exists ! \, [\Theta] \in H^n_{cv}(E)$

s.t. $\pi_* \Theta = 1$ つまり $\int_{E_x} \Theta = 1 \quad (\forall x \in M)$

projection formula

$$\pi_*(\pi^*\alpha \wedge \beta) = \alpha \wedge \pi_*(\beta)$$

を使うと $\pi_*(\pi^*\alpha \wedge \Theta) = \alpha$

よって逆写像は $H^*(M) \longrightarrow H^{*+n}_{cv}(E)$ で与えられる

$$[\alpha] \longmapsto [\pi^*\alpha \wedge \Theta]$$

(注) 上の証明は $H^{n+p}_{cv}(E) \cong H^p(M, \mathcal{H}^n_c)$ を示している

$\mathcal{H}^n_c = \{H^n_c(E_x)\}_{x \in M}$ の与える局所系

<u>複素直線束の場合</u> $p : L \to M$ cpx line bdl

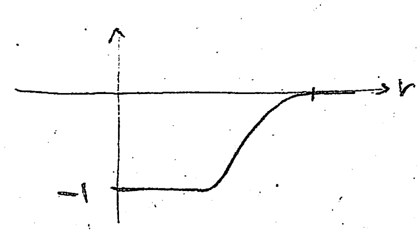
($\sim$ 向き付けられた rank 2 の実ベクトル束)

Hermit計量を固定

$S(L) \to M$ circle bundle 上の connection 1-form ψ をとる

$$\begin{cases} \cdot\ \psi|_{S(L_x)} = d\theta \\ \cdot\ \psi \text{ は } S^1\text{-invariant} \end{cases}$$

$\rho(r)$: $[0, \infty)$ 上の C^∞級関数



$$\begin{cases} r=0 \text{ の近くでは } -1 \\ r \text{ が十分大きいとき } 0 \end{cases}$$

$$r : L \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$
$$v \longmapsto \|v\| = \sqrt{h(v,v)}$$

$$q : L \setminus M \longrightarrow S(L) \qquad \text{とおく}$$
$$v \longmapsto \frac{v}{\|v\|}$$

\begin{tikzcd}
L \setminus M \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "p"'] & S(L) \arrow[d, "p"] \\
& M
\end{tikzcd}

<u>Prop</u> $\Theta = \frac{1}{2\pi} d(\rho(r)\, q^*\psi)$ は L の Thom form を与える

(∵) Θ は明らかに closed (exact ではない. $\rho(r) q^*\psi$ は $r=0$ で ill-defined)

$$2\pi\, \Theta = d\rho \wedge q^*\psi + \rho(r) \wedge q^* d\psi$$
$$= d\rho \wedge q^*\psi + \rho(r) \wedge q^*(-2\pi\, p^* e) \qquad e : \text{Euler form}$$
$$= d\rho \wedge q^*\psi - 2\pi\, \rho(r)\, p^*(e)$$

は $r=0$ のまわりでも smooth

$$\int_{L_x} \Theta = \frac{1}{2\pi} \int_{L_x} d\rho \wedge q^*\psi$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \rho'(r)\, dr \wedge d\theta \qquad (r, \theta) \text{ は } L_x \cong \mathbb{C} \text{ の極座標}$$
$$= 1$$

<u>定理</u> $L \to M$ $\mathbb{C}$ 直線束, $s : M \to L$ C^∞-section

$[\Theta]$: L の Thom 類 とすると

$$e(L) = s^*[\Theta]$$

$$H^*_{cv}(E) \to H^*(E) \xrightarrow{s^*} H^*(M$$
$$[\Theta]$$
と思える

∵ 全ての section は零切断 s_0 と homotopic なので

$$s^*[\Theta] = s_0^*[\Theta]$$

$$= s_0^*\left[\frac{1}{2\pi} d(\rho(r)\, q^*\psi)\right] \qquad \text{Prop にある } \Theta \text{ を使う}$$

$$= s_0^*\left[\frac{1}{2\pi}(d\rho \wedge q^*\psi - 2\pi\, \rho\, p^* e)\right]$$

$$= s_0^* p^* e = e \qquad //$$

これをみて一般に次のように定義する

<u>定義</u> $E \to M$ 向きづけられた rank n ベクトル束

$[\Theta] \in H^n_{cv}(E)$ Thom 类

$s: M \to E$ C^∞ section $e(E) := s^*[\Theta]$ を $E \to M$ の Euler 类 という

注 s のとり方によらない

$$H^n_{cv}(E) \longrightarrow H^n(E) \xrightarrow[s^*]{\cong} H^n(M)$$

すべての section は零切断と homotopic なので s^* は section s のとり方によらない.