No.

Date

- たてとよこを反対にした proposition も成立する

つまり 縦方向のコホモロジー $H^q(K^{p,*}, D'') = 0 \quad \forall q>0, \ \forall p \geq 0$

$$\Rightarrow \quad H^p(H^0(K^{*,*}, D''), D') \cong H^p(K, D)$$

- Čech-de-Rham 複体 は 縦・横の両方にコホモロジーが消えている.

<u>Lem 1</u> (横方向)

$$0 \to \Omega^q(M) \xrightarrow[i]{} \check{C}^0(\mathcal{U}, \Omega^q) \to \check{C}^1(\mathcal{U}, \Omega^q) \to \cdots \quad \text{は exact.}$$

(∵) Ω^q が「fine sheaf」(1の分割をもつ) であることを使う

<u>i の定義</u> $\quad \omega \in \Omega^q(M)$

$$i(\omega)_\alpha = \omega|_{U_\alpha} \quad \text{とおく}.$$

<u>$\check{C}^0$ での完全性</u> $\quad \omega \in \check{C}^1(\mathcal{U}, \Omega^q)$

$$\delta\omega = 0 \iff \forall \alpha, \beta \quad (\delta\omega)_{\alpha\beta} = \omega_\alpha - \omega_\beta = 0 \quad \text{on } U_{\alpha\beta}$$

$$\iff \omega \text{ は global } q\text{-form からくる}.$$

<u>$\check{C}^p$ での完全性</u> $\quad \omega \in \check{C}^p(\mathcal{U}, \Omega^q) \quad \delta\omega = 0$ とする $\quad (p>0)$

$\{\rho_\alpha\}$ 1の分割

$$\eta_{\alpha_0 \cdots \alpha_{p-1}} = \sum_\beta \rho_\beta \underbrace{\omega_{\beta\alpha_0 \cdots \alpha_{p-1}}}_{U_{\beta\alpha_0\cdots\alpha_{p-1}} \text{ 上の form}} \quad \text{は } U_{\alpha_0 \cdots \alpha_{p-1}} \text{ 上の } C^\infty\text{-form}$$

$$(\delta\eta)_{\alpha_0\cdots\alpha_p} = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \, \eta_{\alpha_0\cdots\check{\alpha}_i\cdots\alpha_p}\Big|_{U_{\alpha_0\cdots\alpha_p}}$$

$$= \sum (-1)^i \, \rho_\beta \, \omega_{\beta\alpha_0\cdots\check{\alpha}_i\cdots\alpha_p}\Big|_{U_{\alpha_0\cdots\alpha_p}}$$

$$= \sum_\beta \rho_\beta \, \omega_{\alpha_0\cdots\alpha_p}$$

[$\delta\omega = 0$ を使う]

$$= \omega_{\alpha_0\cdots\alpha_p}$$

//

<u>Lem 2</u> (縦方向)

$$0 \to \check{C}^p(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \hookrightarrow \check{C}^p(\mathcal{U}, \Omega^0) \xrightarrow{d} \check{C}^p(\mathcal{U}, \Omega^1) \xrightarrow{d} \cdots$$

は完全

(∵) $U_{\alpha_0\cdots\alpha_p}$ は可縮なので de Rham コホモロジーは消えており

$$0 \to \mathbb{R} \to \Omega^0(U_{\alpha_0\cdots\alpha_p}) \xrightarrow{d} \Omega^1(U_{\alpha_0\cdots\alpha_p}) \to \cdots$$

は完全

これを全ての $(\alpha_0, \cdots, \alpha_p)$ with $U_{\alpha_0\cdots\alpha_p} \neq \phi$, $\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_p$ にわたって積をとったもの

が与えられた列になる //

$$\begin{array}{ccccccccc}
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\Omega^1(M) & \to & K^{0,1} & \to & K^{1,1} & \to & K^{2,1} & \to & \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\Omega^0(M) & \to & K^{0,0} & \to & K^{1,0} & \to & K^{2,0} & \to & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & \check{C}^0(\mathcal{U}, \mathbb{R}) & \to & \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}) & \to & \check{C}^2(\mathcal{U}, \mathbb{R}) & \to &
\end{array}$$

たて・よこは全て完全

上の Proposition を使うと

$$H^*(\Omega^*(M), d) \xrightarrow{\cong} H^*(K^*, D) \xleftarrow{\cong} H^*(\check{C}^*(\mathcal{U}, \mathbb{R}), \delta)$$

よこは exact　　　たては exact

$$H^*(\Omega^*(M), d) = H^*_{dR}(M), \qquad H^*(\check{C}^*(\mathcal{U}, \mathbb{R}), \delta) = \check{H}^*(\mathcal{U}, \mathbb{R})$$

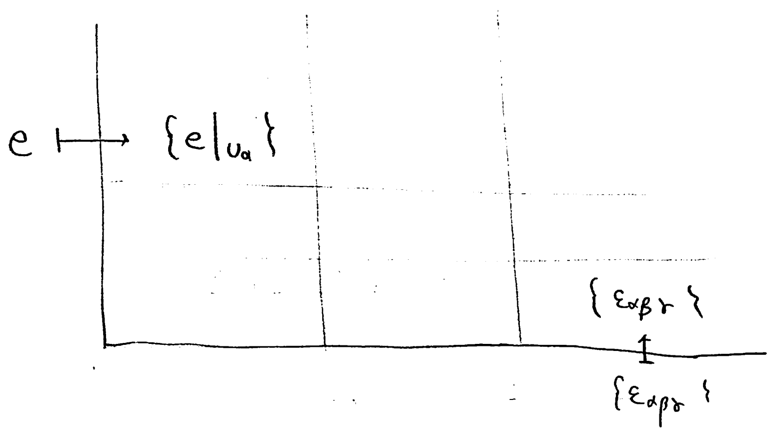
<u>定理</u>　$E \to M$　C^∞級の主S^1束，$\mathcal{U}$: Mの good open cover

Čech cohomology に定まる Euler類 $[\{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\}]$

de Rham coh　〃　〃　$[e]$

は Čech-de-Rham 複体の中で同じコホモロジー類を与える.

[証明は演習]（ヒント）eとεを次の図で比較



$E|_{U_\alpha} \cong U_\alpha \times S^1$　自明化をとって　$\psi|_{U_\alpha} = d\theta_\alpha + \xi_\alpha$　の形にかく

$\xi_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha)$

$\rightsquigarrow$ $\xi_\alpha - \xi_\beta$ は変換関数のdataで書ける.

No.

Date

Čech - Singular complex

X：位相空間

- singular p-simplex とは 連続写像 $\sigma : \Delta_p \longrightarrow X$ のこと

- $S_p(X) :=$ singular p-simplex $\Delta_p \to X$ の生成する自由 $\mathbb{Z}$ 加群

- $\partial_p : S_p(X) \to S_{p-1}(X)$ $\quad \partial[\sigma] = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i [\sigma \circ \partial^i]$

$\partial^i : \Delta_{p-1} \to \Delta_p$ は face map

$\partial \circ \partial = 0 \rightsquigarrow$ singular homology $H_*^{sing}(X)$

- $S^p(X) = \mathrm{Hom}(S_p(X), \mathbb{Z})$

$d : S^p(X) \to S^{p+1}(X)$ は ∂ の双対 $\quad d \circ d = 0$

$\rightsquigarrow$ singular cohomology $H^*_{sing}(X)$

$\mathcal{U}$：X の good open cover

$K^{p,q} = \check{C}^p(\mathcal{U}, S^q)$ $\qquad S^q$：presheaf と思える

$= \left\{ \{\omega_{\alpha_0 \cdots \alpha_p}\} \;\middle|\; \begin{array}{l} \omega_{\alpha_0 \cdots \alpha_p} \in S^q(U_{\alpha_0 \cdots \alpha_p}) \\ \alpha_0 \cdots \alpha_p \text{ の入れかえについて反対称} \end{array} \right\}$

$\left. \begin{array}{l} d : K^{p,q} \longrightarrow K^{p,q+1} \\ \delta : K^{p,q} \longrightarrow K^{p+1,q} \end{array} \right\}$ が前と同様に定義される

$D' = \delta, \quad D''|_{K^{p,q}} = (-1)^p d$

より 二重複体

No.

Date

・たてのexactness

$$0 \to \check{C}^p(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) \to \check{C}^p(\mathcal{U}, S^0) \to \check{C}^p(\mathcal{U}, S^1) \to \cdots$$

は各 $U_{\alpha_0\cdots\alpha_p}$ が可縮であることと $H^*_{sing}(U_{\alpha_0\cdots\alpha_p}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & *=0 \\ 0 & *>0 \end{cases}$

から分かる。

・よこのexactness

$$0 \to S^q_{\mathcal{U}}(X) \to \check{C}^0(\mathcal{U}, S^q) \xrightarrow{\delta} \check{C}^1(\mathcal{U}, S^q) \to \cdots$$

ここで $S^q_{\mathcal{U}}(X) := \mathrm{Hom}(S^{\mathcal{U}}_q(X), \mathbb{Z}) \twoheadleftarrow S^q(X)$

$S^{\mathcal{U}}_q(X)$ = どれかの U_α に含まれる singular q-simplex で生成される自由 $\mathbb{Z}$ 加群。

[Bott-Tu] (15.7) 参照, Prop 15.2

実は $H^*_{sing}(X) \cong H^*(S^*_{\mathcal{U}}(X))$ が分かる。

$$\begin{array}{ccccccc}
S^2_{\mathcal{U}}(X) & \to & \check{C}^0(\mathcal{U}, S^2) & \xrightarrow[\delta]{} & \check{C}^1(\mathcal{U}, S^2) & & \\
\uparrow & & d\uparrow & & -d\uparrow & & \\
S^1_{\mathcal{U}}(X) & \to & \check{C}^0(\mathcal{U}, S^1) & \xrightarrow[\delta]{} & \check{C}^1(\mathcal{U}, S^1) & \to & \check{C}^2(\mathcal{U}, S^1) \\
\uparrow & & d\uparrow & & -d\uparrow & & \uparrow \\
S^0_{\mathcal{U}}(X) & \to & \check{C}^0(\mathcal{U}, S^0) & \xrightarrow[\delta]{} & \check{C}^1(\mathcal{U}, S^0) & \to & \check{C}^2(\mathcal{U}, S^0) \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & \check{C}^0(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) & \to & \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) & \to & \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z})
\end{array}$$

・前と同じ議論で $\check{H}^*(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) \cong H^*_D(K^\bullet) \cong H^*_{sing}(X)$

問 Euler類を singular coh で定義し、Čech cohomology 類としての定義と上の同型で比較せよ。

No.
Date

(注) good open cover を持つ空間

- paracompact 多様体
- 単体複体 (open star)

CW 複体は ある単体複体と ホモトピー同値 (つまり good open cover を持つ空間と ホモトピー同値)

($\forall$ 位相空間は ある単体複体と 弱ホモトピー同値 $|Sing(X)| \to X$)

Gray "Homotopy Theory" Cor 16.44

の重心細分を2回とる は ホモトピー群の同型を導く.

主 S^1 束と complex line bdle の分類

X: good open cover を持つ paracpt Hausdorff 空間

$L \to X$ $\mathbb{C}$ 直線束

エルミート計量をとると $S(L) = \bigcup_{x \in X} \{ v \in L_x \mid \|v\| = 1 \}$

主 S^1 束

$v \longmapsto v e^{i\theta}$ S^1 作用

$e(L) := e(S(L))$ と定義する

(注) エルミート計量のとり方には よらない.

別の計量で S^1 束 $S'(L)$ を定めても $S(L) \cong S'(L)$ (主 S^1 束として)

No.

Date

<u>定理</u> X : 上の滑り

$$\left\{\begin{matrix} X \text{ 上の複素直線束} \\ \text{の同型類} \end{matrix}\right\} \cong \left\{\begin{matrix} X \text{ 上の主 } S^1 \text{ 束} \\ \text{の同型類} \end{matrix}\right\} \cong H^2(X, \mathbb{Z})$$

$$L \xmapsto{①} S(L) \xmapsto{②} e(L) = e(S(L))$$

さらに ①, ② は群構造を保つ

(∵) ① の逆対応

$p : E \longrightarrow X$ 主 S^1 束

$$L = E \times_{S^1} \mathbb{C} = E \times \mathbb{C} \Big/ (e\lambda, v) \sim (e, \lambda v) \quad \lambda \in S^1$$

とおけばよい (同伴ベクトル束)

L のエルミート計量を $\mathbb{C}$ の標準計量から誘導されるものとすると

$$\begin{matrix} E & \cong & S(L) & \text{主 } S^1 \text{ 束の同型} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & \\ e & \longmapsto & [e, 1] & \end{matrix}$$

② Čech coh で考える

$\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ good open cover

$E \to X$ S^1 束 $g_{\alpha\beta}$ 変換関数

$g_{\alpha\beta} = e^{\sqrt{-1}\varphi_{\alpha\beta}}$ $\varphi_{\alpha\beta} = -\varphi_{\beta\alpha}$ なる $\varphi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to \mathbb{R}$ をとり

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2\pi}\left(\varphi_{\alpha\beta} + \varphi_{\beta\gamma} + \varphi_{\gamma\alpha}\right) \in \mathbb{Z}$$

- 群構造　$E_1 \to X,\quad E_2 \to X$　主S^1束

$$E_1 \times_{S^1} E_2 := E_1 \underset{X}{\times} E_2 \Big/ (e_1\lambda, e_2) \sim (e_1, e_2\lambda) \qquad \lambda \in S^1$$

E_iの変換関数 $g^{(i)}_{\alpha\beta}$ $\Longrightarrow$ $E_1 \times_{S^1} E_2$の変換関数

$(i=1,2)$　　　　$g^{(1)}_{\alpha\beta} \cdot g^{(2)}_{\alpha\beta}$

を用いると ② の対応は 群構造を保つことが分かる

[問 line bdle に $L_1 \otimes L_2$ で積を入れると ① は積を保つことを示せ]

単射性

$\varepsilon = \delta n$ とすると　$(n \in \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}))$

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = n_{\alpha\beta} + n_{\beta\gamma} + n_{\gamma\alpha}$$

より　$\xi_{\alpha\beta} := \varphi_{\alpha\beta} - 2\pi n_{\alpha\beta}$ とおくと

ξ は連続関数に値をとる Čech 1-cocycle

$\delta\xi = 0,\quad \xi \in \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{C}^0)$　連続関数(の層)

$\check{C}^*(\mathcal{U}, \mathcal{C}^0)$ の完全性から　$\exists \{u_\alpha\} \in \check{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{C}^0)$

$$\xi_{\alpha\beta} = u_\beta - u_\alpha$$

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} = e^{\sqrt{-1}\varphi_{\alpha\beta}} &= e^{\sqrt{-1}(\varphi_{\alpha\beta} - 2\pi n_{\alpha\beta})} \\ &= e^{\sqrt{-1}\xi_{\alpha\beta}} = e^{\sqrt{-1}(u_\beta - u_\alpha)} \\ &= \lambda_\alpha^{-1}\lambda_\beta \qquad\qquad \lambda_\alpha = e^{\sqrt{-1}u_\alpha} \end{aligned}$$

つまり 主S^1束は自明

No.

Date

全射性 $\varepsilon = \{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\} \in \check{C}^2(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$ をとる

$\varepsilon \in \check{C}^2(\mathcal{U}, \mathcal{C}^0)$ と見ると $\exists \varphi \in \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{C}^0)$

s.t. $\varepsilon = \frac{1}{2\pi}\delta\varphi$

$g_{\alpha\beta} = e^{\sqrt{-1}\varphi_{\alpha\beta}}$ とおけば $g_{\alpha\beta}$ は cocycle 条件を満たす

ので 主 S^1 束を定める. //

Euler 類のさまざまな定義

- Thom 類の引き戻し
- sheaf cohomology
- 分類空間を使う.

etc

$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{C}^0 \xrightarrow{\exp(2\pi i\,\cdot)} \mathcal{C}^0(\cdot, S^1) \to 1$

の長完全列の連結準同型

$H^1(X, \mathcal{C}^0(\cdot, S^1)) \to H^2(X, \mathbb{Z})$

$\quad\ \rotatebox{90}{$\in$} \qquad\qquad\qquad\qquad \rotatebox{90}{$\in$}$

主 S^1 束 $\longmapsto e$