No.

Date

(2) 各頂点 v に対して $X_v^{(1)} = $ (vを含む1単体の和)

上の section s は closed star $\overline{U_v}$ 上の section s_v に拡張できる

(∵ $X_v^{(1)}$ は $\overline{U_v}$ の deformation retract)

(3) s_v は自明化 $E|_{\overline{U_v}} \cong \overline{U_v} \times S^1$ を与える

$$\begin{array}{ccc} \cup & & \cup \\ s_v(x) & \longmapsto & (x, 1) \end{array}$$

(4) 変換関数 $g_{uv} : U_{uv} \to S^1$ が定まる

定理 上の状況で $X^{(1)}$ 上の section s の定める obstruction cocycle e_s

と変換関数 $g_{\alpha\beta}$ (の適当な $\log$ の枝) の定める

Čech cocycle $\{\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\}$ は一致する. 特に $\underset{\text{Čech}}{[\epsilon]} = \underset{\text{simplicial}}{[e]}$

問 この定理を示せ

↵

2021/5/18

前回の訂正

Čech p-cochain の定義を次のように訂正

$U_{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_p} \neq \phi$ なる $(\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_p)$ に対して $\omega_{\alpha_0\cdots\alpha_p} \in G$ が定まり

- $\omega_{\alpha_0\cdots\alpha_p}$ は $\alpha_0, \cdots, \alpha_p$ の入れかえに対して反対称.
- $\boxed{\alpha_0, \cdots, \alpha_p \text{ に重複があるときは } \omega_{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_p} = 0 \text{ とする}}$ ← 追加する

(G に order 2 の元がないときは前と同じ定義)

No.

Date

§ de Rham コホモロジーでのEuler類

[Bott–Tu §6 「Differential forms in algebraic topology」
森田「微分形式の幾何学」6章

M : C^∞級多様体

$E \to M$: C^∞級 主S^1束

例) $\mathbb{C}P^1$ 上の tautological line bundle

$$L = \{ (l, v) \in \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}^2 \mid v \in l \} \longrightarrow \mathbb{C}P^1$$

$$S(L) = \{ (l, v) \in L \mid \|v\| = 1 \} \quad \text{circle bundle}$$

l は v で生成される $\mathbb{C}$ subspace

$$\cong S^3$$

$S^3 = S(L) \longrightarrow \mathbb{C}P^1$ は 主S^1束 (Hopf fibration)

S^1作用は $v \longmapsto v \cdot e^{i\theta}$ $(e^{i\theta} \in S^1)$

定義 $\theta \longmapsto e^{i\theta}$ を S^1の座標とする

E上の S^1不変 1-form ψ であって、各 fiber に制限すると $d\theta$ に等しいもの を Eの接続1形式 (connection 1-form) という

(注) 各 fiber 上の $d\theta$ は well-defined (自明化のとり方によらない)

S^1-不変 : $z \in S^1$ の作用 $R_z : E \longrightarrow E$, $e \longmapsto e \cdot z$

に対して $R_z^* \psi = \psi$

(より一般の主G束の接続 : Lie環 $\mathfrak{g}$ に値をとる 1-form)

No.

Date

- 自明束の接続 $M\times S^1$ 　　Mの座標 $x_1,\dots,x_n$.

$$\varphi = f(x,\theta)\,d\theta + \sum_{i=1}^{n} g_i(x,\theta)\,dx_i$$

fiber上では $d\theta$ $\rightsquigarrow$ $f(x,\theta)=1$

$z=e^{i\alpha}$の作用 $\theta\mapsto\theta+\alpha$ で不変 $\rightsquigarrow$ $g_i(x,\theta)$ は θによらない

$$\varphi \doteq d\theta + \sum_{i=1}^{n} g_i(x)\,dx_i \quad \text{の形}$$

<u>Prop</u> 任意の C^∞級主S^1束 $p: E\to M$ 上に接続1-formが存在する

∵ $\exists$ open cover $\{U_\alpha\}$ 　$E|_{U_\alpha}\cong U_\alpha\times S^1$

自明束上には接続が存在するので

$\exists\,\varphi_\alpha$: $E|_{U_\alpha}$ 上の connection 1-form

$\{\rho_\alpha\}$: $\{U_\alpha\}$に付随する滑らかな1の分割 　$\rho_\alpha : U_\alpha\to[0,1]$

$p: E\to M$ を射影として

$$\varphi := \sum_\alpha (p^*\rho_\alpha)\,\varphi_\alpha \quad \text{とおくとよい}$$

- fiber上で $\varphi|_{E_x} = \sum_\alpha \rho_\alpha(x)\,\varphi_\alpha|_{E_x} = \left(\sum_\alpha \rho_\alpha(x)\right) d\theta = d\theta$
- S^1不変も明らか

//

No.

Date

Prop ψ: 主S^1束の connection 1-form

$\exists !$ closed 2-form $e \in \Omega^2(M)$ s.t. $d\psi = -2\pi p^*(e)$

e の de Rham コホモロジー類 は ψ のとり方によらない。

$[e] \in H^2_{dR}(M)$ を Euler類という (e を Euler form という)

(:)

局所的には $E|_U \cong U \times S^1$ (U; $x_1, \cdots, x_n$) 座標近傍

ψ は $\psi|_U = d\theta + \sum_{i=1}^{n} g_i(x)\, dx_i$ の形

$\therefore\ d\psi|_U = \sum_{i,j} \frac{\partial g_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i$ は U 上の 2-form の引き戻し

$\Rightarrow\ d\psi = -2\pi p^*(e)$ $e \in \Omega^2(M)$ の形に書ける

$0 = d(d\psi) = -2\pi\, p^*(de)$ より $de = 0$

ψ_1, ψ_2 : 2つの接続1形式とする。 上と同様に局所的にみて

$$\psi_1 - \psi_2 = p^* \xi \qquad \exists\, \xi \in \Omega^1(M)$$

が言える $d\psi_i = -2\pi\, p^* e_i$ とすると

$$e_1 - e_2 = -\frac{1}{2\pi} d\xi$$

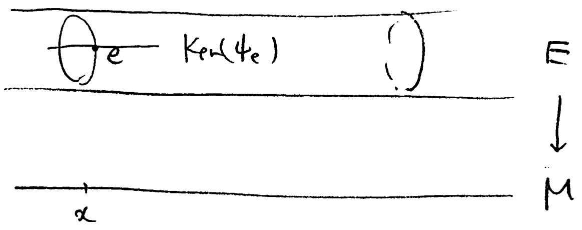
//

定義 接続1形式 ψ に対して $d\psi = -2\pi p^*(e)$ をみたす e をとる

$\omega = -2\pi i e$ を <u>曲率形式</u> という

($i\, d\psi = p^*(\omega)$ をみたす 2-form ω)

接続の意味



$x = p(e)$ とする

ψ を与える $\Longrightarrow$ $\psi_e : T_eE \to \mathbb{R}$

は $T_e p^{-1}(x)$ 上では同型

$$\Longrightarrow \text{分解} \quad T_eE \cong T_e p^{-1}(x) \oplus \underbrace{\mathrm{Ker}(\psi_e)}_{} \quad \text{を与える}$$

$\mathrm{Ker}(\psi_e) = H_e$

(水平部分空間 horizontal subspace という

・逆に各点での分解

$$T_eE = T_e p^{-1}(p(e)) \oplus H_e$$

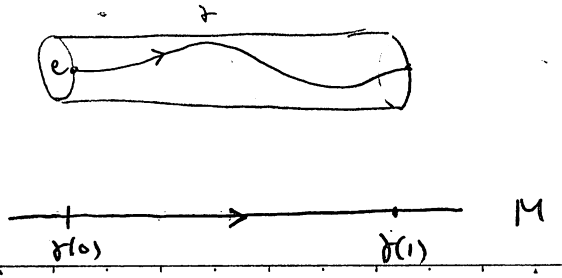
で S^1 不変なものが与えられると、接続形式 ψ がつくれる。

・水平部分空間は fiber のつながり方を infinitesimal に与えるもの

問 $\gamma : [0,1] \to M$ C^∞級の道

$\forall e \in p^{-1}(\gamma(0))$ $\exists!\ \tilde{\gamma} : [0,1] \to E$ (水平リフト)

$$p\circ\tilde{\gamma} = \gamma, \quad \tilde{\gamma}(0) = e, \quad \frac{d\tilde{\gamma}}{dt} \in H_{\tilde{\gamma}(t)}$$



「γに沿った平行移動」が定義できる

$$\begin{array}{ccc} E_{\gamma(0)} & \longrightarrow & E_{\gamma(1)} \\ \Psi & & \Psi \\ e & \longmapsto & \tilde{\gamma}(1) \end{array}$$

S^1同変になる

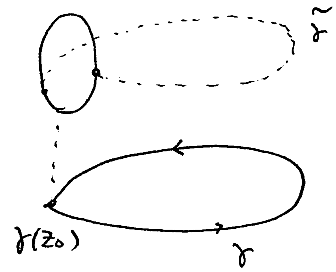
No.

Date

問 closed loop に沿った平行移動（ホロノミー）

$g : D^2 \longrightarrow M$ $\quad C^\infty$ map $\qquad \gamma := g|_{\partial D^2}$

$z_0 \in \partial D^2$ base point



γの水平リフトにより 平行移動

$$E_{\gamma(z_0)} \longrightarrow E_{\gamma(z_0)}$$

が定まるが この map は

$$e^{2\pi i \int_{D^2} g^* e}$$ の作用に等しい

ヒント $g^*E \cong D^2 \times S^1$ 自明化をとって計算すればよい

(解) $g^*\varphi = d\theta + \xi$ $\qquad \xi$ は D^2 上の 1-form

$\tilde{\gamma}(e^{is}) = (e^{is}, e^{i\theta(s)})$ $\qquad (e^{is} \in \partial D^2)$ とおくとき

$\tilde{\gamma}$が水平リフトゆえ $\quad \theta'(s) = -\xi(\partial/\partial s)$ $\quad$ ($\partial/\partial s$ は ∂D^2 上のベクトル場)

$$\theta(2\pi) - \theta(0) = \int_0^{2\pi} \theta'(s)\, ds$$

$$= -\int_{\partial D^2} \xi = -\int_{D^2} d\xi = 2\pi \int_{D^2} g^* e \quad //$$

Čech-de Rham 複体

[Bott-Tu] §8

- 障害類として
- Čech cohomology として } 前回
- 曲率として } 対応をみる

No.

Date

- M: C^∞ mfd, $\mathcal{U}$: good open cover をとると

$$H^*_{dR}(M) \cong \check{H}^*(\mathcal{U}, \mathbb{R})$$ を示したい

さらに Euler 類が対応することをみる.

- 「sheaf」に値をとる Čech cochain

Def Ω^q に値をとる p 次 Čech cochain とは $U_{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_p} \neq \phi$ なる $(\alpha_0, \cdots, \alpha_p)$ に対して q-form $\omega_{\alpha_0\cdots\alpha_p} \in \Omega^q(U_{\alpha_0\cdots\alpha_p})$ が定まり

$\omega_{\alpha_0\cdots\alpha_p}$ は $\alpha_0, \cdots, \alpha_p$ の入れかえについて反対称であるもの

$$K^{p,q} = \check{C}^p(\mathcal{U}, \Omega^q) = \{\Omega^q \text{ に値をとる } p \text{ 次 Čech cochain}\}$$

$K^{p,q}$ は <u>2重複体</u> (Čech-de-Rham cpx)

$d: K^{p,q} \longrightarrow K^{p,q+1}$ de Rham の微分 (外微分)

$\delta: K^{p,q} \longrightarrow K^{p+1,q}$ Čech の微分

$$(\delta\omega)_{\alpha_0\cdots\alpha_{p+1}} \doteq \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \omega_{\alpha_0\cdots\check{\alpha}_i\cdots\alpha_{p+1}}\Big|_{U_{\alpha_0\cdots\alpha_{p+1}}}$$

$d^2 = 0$, $\delta^2 = 0$, $d\delta = \delta d$ (容易)

$$K^n := \bigoplus_{p+q=n} K^{p,q}$$ total complex.

$D: K^n \longrightarrow K^{n+1}$ $\quad D = D' + D''$

$D' = \delta$, $D''\big|_{K^{p,q}} = (-1)^p \cdot d$

とおくと、 $(D')^2=0$, $(D'')^2=0$, $D'D''+D''D'=0$

$$\Rightarrow \quad D^2=0$$

q: de Rham

$$\begin{tikzcd}
K^{0,2} \arrow[r, "\delta"] & K^{1,2} \arrow[r, "\delta"] & K^{2,2} \\
K^{0,1} \arrow[r, "\delta"'] \arrow[u, "d"'] & K^{1,1} \arrow[r, "\delta"'] \arrow[u, "-d"'] & K^{2,1} \arrow[u, "d"'] \\
K^{0,0} \arrow[r, "\delta"'] \arrow[u, "d"'] & K^{1,0} \arrow[r, "\delta"'] \arrow[u, "-d"'] & K^{2,0} \arrow[u, "d"']
\end{tikzcd}$$

p: Čech方向

K^2

(double complex の一般論) $K^{p,q}=0$ if $p<0$ または $q<0$ とする

$D': K^{p,q}\to K^{p+1,q}$ $D'': K^{p,q}\to K^{p,q+1}$

で上の関係をみたすとする

<u>Prop</u> $H^p(K^{*,q}, D')=0$ $\forall p>0$, $\forall q\geq 0$ 横方向に高次コホモロジーが消える

$\Rightarrow$ $H^0(K^{*,q}, D') \hookrightarrow K^{0,q} \subset K^q$

はコホモロジーの同型を導く

$$H^q(H^0(K^{*,*}, D'), D'') \cong H^q(K^*, D)$$

$C^q = H^0(K^{*,q}, D')$ とおく

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & C^2 & \to & K^{0,2} & \to & K^{1,2} & \to & K^{2,2} & \to \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
0 \to & C^1 & \to & K^{0,1} & \to & K^{1,1} & \to & K^{2,1} & \to \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
0 \to & C^0 & \to & K^{0,0} & \to & K^{1,0} & \to & K^{2,0} & \to
\end{array}
$$

横方向に exact

• 2次の cocycle

$$
\begin{array}{lll}
\uparrow & & \\
\alpha^{0,2} \to & & \\
 & \uparrow & \\
 & \alpha^{1,1} \to & \\
 & & \uparrow \\
 & \beta^{1,0} \mapsto & \alpha^{2,0} \to 0
\end{array}
$$

$D'\alpha^{2,0} = 0$

ゆえ

$\exists \beta^{1,0}, \quad \alpha^{2,0} = D'\beta^{1,0}$

[$\alpha = \alpha^{0,2} + \alpha^{1,1} + \alpha^{2,0}, \quad D\alpha = 0$ とする]

• α を $\alpha - D\beta^{1,0} = \alpha^{0,2} + \tilde{\alpha}^{1,1}$ にとりかえて

$$
\begin{array}{lll}
\alpha^{0,2} & & \\
\exists \beta^{0,1} \mapsto & \tilde{\alpha}^{1,1} \to & 0 \\
 & & 0
\end{array}
$$

となる

$\exists \beta^{0,1}$ s.t. $\tilde{\alpha}^{1,1} = D'\beta^{0,1}$

• くり返して任意の2次コホモロジーの代表元は

$$
\begin{array}{lll}
\tilde{\alpha}^{0,2} & & \\
 & 0 & \\
 & & 0
\end{array}
$$

ととれる.

$D'\alpha^{0,2} = 0, \quad D''\alpha^{0,2} = 0$

$\alpha^{0,2} \in C^2$

⇝ コホモロジーに全射を導くことが分かる

単射も同様に diagram chasing でいえる (演習)