No.

Date

$$\partial : C_n \longrightarrow C_{n-1} \qquad \partial[\sigma] = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i [\partial_i \sigma]$$

問　$[\sigma]$の向き：　Δ_n の座標 $(t_1, \dots, t_n)$ により決まる向き

$\rightsquigarrow$ $\partial[\sigma]$ に誘導される向き と上の公式は一致する

$\partial \circ \partial = 0$ がいえて　$H_n(K, R) := H_n(C_*, \partial)$

$$= \frac{\mathrm{Ker}(\partial : C_n \to C_{n-1})}{\mathrm{Im}(\partial : C_{n+1} \to C_n)}$$

$$C^n := \mathrm{Hom}(C_n, R) \cong R^{S_n}$$

$\delta : C^n \to C^{n+1}$ が ∂ の双対として定まる。

$H^n(K, R) = H^n(C^*, \delta)$ $\leftarrow$ $|K|$の位相不変量になる。

2021/5/11

Euler類（障害類）

$X \cong |K|$　単体分割の与えられた位相空間 X.

$E \to X$　向き付けられた S^1束

・各単体$|\sigma|$上で　Eは自明　$E|_{|\sigma|} \cong |\sigma| \times S^1$

[$\because$ $|\sigma|$は可縮]

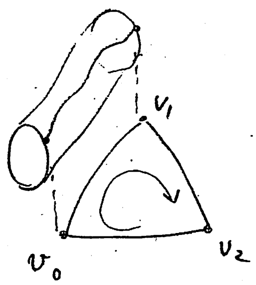
・0単体 v に対して　$e_v \in E_v$ をとる

・1単体 $\tau = \{v_0, v_1\}$ に対して　$|\tau|$上のEの section　$s_\tau : |\tau| \to E|_{|\tau|}$

であって $s_\tau(v_0) = e_{v_0}$, $s_\tau(v_1) = e_{v_1}$ なるもの が存在する

(S^1 は連結だから)

⇝ $X^{(1)}$ (1-skeleton) 上の section s が定まる



・各2単体 $|\sigma|$ 上に s をのばすことは一般にはできない。

$$S^1 \cong \partial|\sigma| \xrightarrow{s} E\big|_{\partial|\sigma|} = \partial|\sigma| \times S^1 \xrightarrow{pr_2} S^1$$

↑ 向きがある　　　　↑ fiber は向き付けられる

・写像度を $e(\sigma)$ とおく

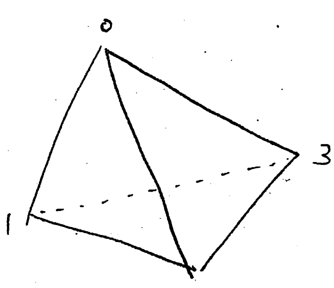
$$e(\sigma) = e_s(\sigma)$$

s のとり方による

<u>Claim</u> $e : S_2 \ni \sigma \longmapsto e(\sigma) \in \mathbb{Z}$ は cocycle

つまり $\delta e = 0$ (obstruction cocycle)

∵ 各3単体 ρ に対して $e(\partial\rho) = 0$ を示せばよい。



$$E\big|_{|\rho|} \cong |\rho| \times S^1$$

各辺 $[i,j]$ 上の section は

$$s(t) = (t, e^{\sqrt{-1} f(t)})$$

の形にかける $f : [i,j] \to \mathbb{R}$

No.

Date

$\theta_{ij} := f(j) - f(i)$　　位相の変化

2単体　$\{i,j,k\} < \{0,1,2,3\}$ に対して

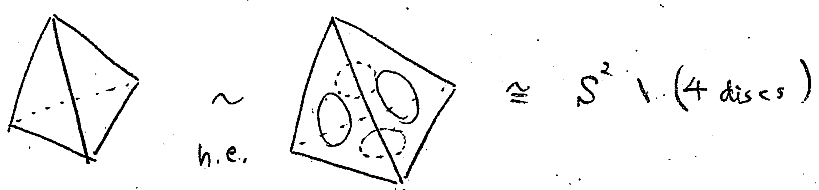
$$e(i,j,k) = (\theta_{ij} + \theta_{jk} + \theta_{ki}) \frac{1}{2\pi}$$

簡単な計算で

$$e(\partial\rho) = \sum_{i=0}^{3} e(0,\cdots\hat{i},\cdots 3)(-1)^i = \cdots = 0$$

<u>別の見方</u>　ρ の 1-skeleton 上での section $\rho^{(1)} \xrightarrow[s]{} S^1$

は　$(\partial\rho) \setminus 4\,\text{discs} \to S^1$ に拡張する



$\rho^{(1)}$

$$0 = s_*\left(\left(\partial|\rho| \setminus 4\,\text{discs}\right) \text{の境界}\right) \quad \text{in } H_1(S^1)$$

$$= \sum_{i=0}^{3} e(0,\cdots\hat{i},\cdots,3)(-1)^i = e(\partial\rho)$$

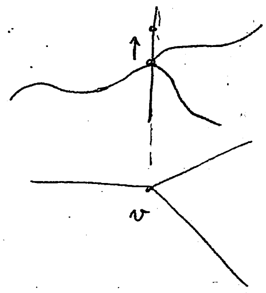
<u>Claim</u>　e の cohomology 類は $X^{(1)}$ 上の section s のとり方によらない

$\because$　s_1, s_2 : 2つの section on $X^{(1)} \rightsquigarrow e_1, e_2$

e_i は s_i のホモトピー類にしかよらないことから

必要なら s_2 をホモトピックに動かして $s_1\big|_{X^{(0)}} = s_2\big|_{X^{(0)}}$

としてよい



頂点の近くで動かすことは容易

各1単体 $[i,j]$ 上では 自明化の下で

$$\begin{cases} s_1(t) = e^{\sqrt{-1}\, f_1(t)} & f_1(i) = f_2(i) \\ s_2(t) = e^{\sqrt{-1}\, f_2(t)} & f_1(j) = f_2(j) + 2\pi n_{ij} \end{cases}$$

$i \to j$ での位相の増分の差

このとき $e_1(ijk) = e_2(ijk) + n_{ij} + n_{jk} + n_{ki}$

$n_{ki} = -n_{ik}$ に注意して

$$e_1 - e_2 = \delta\{n_{ij}\} \qquad n_{ij} \in C^1(K)$$

とみている

<u>定義</u> $e(E) = [e] \in H^2(X;\mathbb{Z})$ を E のオイラー類という

注 上の証明を逆にたどると

$e(E) = 0 \iff X^{(1)}$ 上の section s で

$e_s(\sigma) = 0 \quad (\forall \sigma \in S_2)$

なるものが存在する

$\iff$ E は $X^{(2)}$ 上の section を持つ

No.

Date

つまり Euler類は E が 2-skeleton で section を持つための障害をはかっていると考えられる

(注) もし $E|_{X^{(2)}}$ が section をもてば この section は $X^{(3)}, X^{(4)}, \cdots$ に拡張できる ∵ $\pi_k(S^1) = 0 \quad (k \geq 2)$

$\rightsquigarrow$ $E \to X$ は section を持つ. //

Čech cohomology による Euler類の定義

［森田「微分形式の幾何学」§6
Bott-Tu §6, §11

$\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ open covering

$U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$

$U_{\alpha\beta\gamma} = U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ 等と書く

定義 G : abel群

open covering $\mathcal{U}$ についての G に値をとる $\overbrace{\text{p次の}}$ Čech cochain とは

$U_{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_p} \neq \phi$ なる $(\alpha_0, \cdots, \alpha_p) \in A^{p+1}$ に対して G の元

$\omega_{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_p} \in G$ が与えられ, $\alpha_0, \cdots, \alpha_p$ の入れかえに関して

反対称であるもの

$$\check{C}^p(\mathcal{U}, G) = \{ (\omega_{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_p}) : \text{p次 Čech cochain} \}$$

(例)

0次の Čech cochain : 各 $\alpha \in A$ に対し $\omega_\alpha \in G$ が定まる

・ベクトル束の変換関数 $g_{\alpha\beta}$: 非可換群 $GL(n,\mathbb{C})$ に値をとり、
また関数になっている
(非可換群の sheaf に値をとる) 1-cochain

<u>微分</u>

$$\delta : \check{C}^p(\mathcal{U}, G) \longrightarrow \check{C}^{p+1}(\mathcal{U}, G)$$

$$(\delta\omega)_{\alpha_0\cdots\alpha_{p+1}} := \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \, \omega_{\alpha_0\cdots\check{\alpha}_i\cdots\alpha_{p+1}}$$

この定義は反対称性を保つ (演習)

$\delta^2 = 0$ は単体複体のときと同様

$$\check{H}^p(\mathcal{U}, G) = \operatorname{Ker}(\delta : \check{C}^p \to \check{C}^{p+1}) \big/ \operatorname{Im}(\delta : \check{C}^{p-1} \to \check{C}^p)$$

(3.11) Čech 1-cocycle $\omega \in \check{C}^1$ に対して $\delta\omega = 0$ とすると

$$0 = (\delta\omega)_{\alpha\beta\gamma} = \omega_{\beta\gamma} - \omega_{\alpha\gamma} + \omega_{\alpha\beta}$$

$$= \omega_{\beta\gamma} + \omega_{\gamma\alpha} + \omega_{\alpha\beta}$$

[<u>cf</u> 変換関数の cocycle 条件 $g_{\alpha\beta}\, g_{\beta\gamma}\, g_{\gamma\alpha} = 1$]

<u>Def</u> $\mathcal{U}$: good cover $\Longleftrightarrow$ $\forall \alpha_0, \ldots, \alpha_p$ $(\forall p)$ に対して
$U_{\alpha_0\cdots\alpha_p} \neq \phi$ ならば $U_{\alpha_0\cdots\alpha_p}$ は可縮

<u>事実</u>

$$\mathcal{U} : \text{good open cover} \Rightarrow \check{H}^p(\mathcal{U}, G) \cong H^p_{\text{sing}}(X, G)$$

No.

Date

$\begin{cases} X: \text{paracpt Hausdorff 空間で } \underbrace{\text{good}}_{\text{open}} \text{ cover } \mathcal{U} \text{ を持つ} \\ E \to X \quad \text{主}S^1\text{束} \end{cases}$

・各 U_α は可縮なので $E|_{U_\alpha} \overset{\phi_\alpha}{\cong} U_\alpha \times S^1$

[(注) U_α は para cpt かどうかは分からないが、これは成立する
(前に述べたパラコンパクト性っ仮定に関する注意と関係)] ($i: U_\alpha \to X$ にホモトピー性質を使う)

・変換関数 $g_{\alpha\beta}: U_{\alpha\beta} \longrightarrow S^1$

$$U_{\alpha\beta} \times S^1 \xrightarrow[\phi_\beta^{-1}]{\cong} E|_{U_{\alpha\beta}} \xrightarrow[\phi_\alpha]{\cong} U_{\alpha\beta} \times S^1$$

$$(x, z) \longmapsto (x, g_{\alpha\beta}(x) z)$$

・$U_{\alpha\beta}$ は可縮なので $g_{\alpha\beta} = e^{\sqrt{-1}\varphi_{\alpha\beta}}$ $\quad {}^\exists \varphi_{\alpha\beta}: U_{\alpha\beta} \longrightarrow \mathbb{R}$

[(問) $\varphi_{\alpha\beta}$ の存在を universal cover $\mathbb{R} \to S^1$ に対する CHP を使って示せ]

・$g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}^{-1}$ より $\varphi_{\alpha\beta} = -\varphi_{\beta\alpha}$ となるようにとれる

・Čech 2-cycle $\quad \epsilon_{\alpha\beta\gamma} := \frac{1}{2\pi}(\varphi_{\alpha\beta} + \varphi_{\beta\gamma} + \varphi_{\gamma\alpha})$

$$= \frac{1}{2\pi}(\delta\varphi)_{\alpha\beta\gamma}$$

φ:「$\mathbb{R}$値関数」に値をとる 1-cochain

(注) $g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} g_{\gamma\alpha} = 1$ より $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \in \mathbb{Z}$

$\epsilon = \frac{1}{2\pi}\delta\varphi$ ゆえ $\delta\epsilon = 0$ だが、$\mathbb{Z}$ に値をとる cocycle

として exact とは限らない

No.

Date

$\epsilon \in \check{C}^2(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$　2-cocycle ができた

<u>Claim</u>　$[\epsilon] \in \check{H}^2(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$ は 自明化や $\varphi_{\alpha\beta}$ のとり方 によらない。

（Čech coh での Euler 類の定義）

☺

別の U_α 上での 自明化をとると

$$g'_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha \, g_{\alpha\beta} \, \lambda_\beta^{-1} \qquad \left({}^\exists \lambda_\alpha : U_\alpha \to S^1 \right)$$

と書ける

$$\lambda_\alpha(x) = e^{\sqrt{-1}\,\xi_\alpha(x)} \qquad {}^\exists \xi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R} \quad \text{と書ける.}$$

$$\left. \begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= e^{\sqrt{-1}\,\varphi_{\alpha\beta}} \\ g'_{\alpha\beta} &= e^{\sqrt{-1}\,\varphi'_{\alpha\beta}} \end{aligned} \right\} \text{とおくと} \qquad \varphi'_{\alpha\beta} = \varphi_{\alpha\beta} + \xi_\alpha - \xi_\beta + 2\pi\, {}^\exists n_{\alpha\beta}$$

$n_{\alpha\beta} \in \mathbb{Z}$　$n_{\beta\alpha} = -n_{\alpha\beta}$

を満たす.

$$\Rightarrow \quad \epsilon'_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2\pi}\left(\varphi'_{\alpha\beta} + \varphi'_{\beta\gamma} + \varphi'_{\gamma\alpha} \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\varphi_{\alpha\beta} + \varphi_{\beta\gamma} + \varphi_{\gamma\alpha} \right) + n_{\alpha\beta} + n_{\beta\gamma} + n_{\gamma\alpha}$$

$$= \epsilon_{\alpha\beta\gamma} + (\delta n)_{\alpha\beta\gamma}$$

//

<u>定義の比較</u>

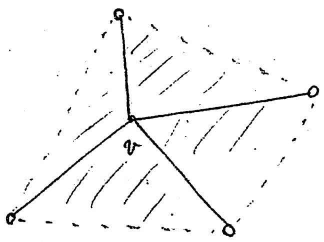
$X \cong |K|$　単体分割

v : K の頂点 に対し　$$O_v = \bigcup_{v \in \sigma} \underbrace{\mathrm{Int}(|\sigma|)}_{\text{relative interior}}$$

No.

Date

Int $|\sigma|$ は $\mathring{\Delta}^n = \{(t_0,\dots,t_n) \mid t_0+\dots+t_n=1,\ t_i>0\ (\forall i)\}$ の像



U_v 「open star」という

・U_v は open（各単体 $|\sigma|$ で open）

・$X = \bigcup_v U_v$ は good open cover（演習）

<u>Cor</u> 単体分割を持つ空間は good open cover を持つ

<u>Prop</u> open star たちのなす good open covering $\mathcal{U}$ に対して

$$\check{H}^p(\mathcal{U},\mathbb{Z}) \cong H^p(K,\mathbb{Z})$$

↑ Čech　　↑ simplicial coh

(∵) 次のことに注意すれば ほぼ定義より従う

$U_{v_0}\cap\cdots\cap U_{v_k}\neq\phi \iff \{v_0,v_1,\dots,v_k\}$ は K の k 単体をなす

$E\to X$ 主 S^1 束　$X\cong|K|$

(1) 1-skeleton $X^{(1)}$ 上での section s をとる

(2) 各頂点 v に対して $X^{(1)}_v = (v$を含む1単体の和$)$

上の section s は closed star $\overline{U_v}$ 上の section s_v に拡張できる

$(\because$ $X^{(1)}_v$ は $\overline{U_v}$ の deformation retract$)$

(3) s_v は自明化 $E|_{\overline{U_v}} \cong \overline{U_v} \times S^1$ を与える

$$s_v(x) \longmapsto (x, 1)$$

(4) 変換関数 $g_{uv} : \overline{U}_{uv} \longrightarrow S^1$ が定まる

定理 上の状況で $X^{(1)}$ 上の section s の定める obstruction cocycle e_s と変換関数 $g_{\alpha\beta}$ (の適当な $\log$ の枝) の定める Čech cocycle $\{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\}$ は一致する. 特に $\underset{\text{Čech}}{[\varepsilon]} = \underset{\text{simplicial}}{[e]}$

問 この定理を示せ.