No.

Date

$G \times F \longrightarrow F$ 　 Gの連続な左作用

$\pi : P \to X$ 　主G束

$\Rightarrow$ Fをfiberとする fiber束（同伴fiber束）が

$$P \times_G F := P \times F \big/ (p\cdot g,\ f) \sim (p,\ g\cdot f) \quad \forall g \in G$$

$$\pi : P \times_G F \longrightarrow X \qquad \pi[p, f] = \pi(p)$$

・どうしてfiber束になるか？　localには $P|_U = U \times G$

$$(U \times G) \times_G F \cong U \times F$$

$$[(u, g),\ f] \longmapsto (u,\ g\cdot f)$$

・このfiber束の変換関数は「Gに値をとる」ことを確認せよ

2021/4/27

この部分は（構成の都合上）あとで話す

例 $G = GL_n(\mathbb{C})$ 　 $GL_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ 　ベクトル表現

$$(g,\ v) \longmapsto g\cdot v$$

主 $GL_n(\mathbb{C})$ 束 $P \to X$ $\longrightarrow$ rank n の $\mathbb{C}$ ベクトル束 $E = P \times_{GL_n(\mathbb{C})} \mathbb{C}^n$

$\longleftarrow$

逆の構成 : frame bundle 　 $E \to X$: ベクトル束

$$Fr(E) = \coprod_{x \in X} \{ (v_1, \dots, v_n) \in E_x^n \mid v_1, \dots, v_n \text{ は } E_x \text{ の basis} \}$$

$GL_n(\mathbb{C})$ の右作用 　 $(v_1, \dots, v_n) \longmapsto (v_1, \dots, v_n) \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & & \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix}$

(例) 上の $GL_n(\mathbb{C})$ 主束の状況で 外積代数への表現 $\rho : GL_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{End}(\Lambda^k \mathbb{C}^n)$ を考えるとき $P \times_{GL_n(\mathbb{C})} \Lambda^k \mathbb{C}^n \cong \Lambda^k E$ となっている

(問) これが互いに逆の操作であることを確かめよ

(問) 主G束に対するホモトピー性質を上の証明をまねて示せ

$P \to X \times I$ 主G束, (X: paracpt, Hausdorff)

$\Rightarrow {}^{\exists}\phi : P \cong \pi^*(P|_{X\times\{1\}})$ 主G束の同型 s.t. $\phi|_{X\times\{1\}} = \mathrm{id}$

系 [被覆ホモトピー性質]

covering homotopy property, homotopy lifting property [CHP]

$E \xrightarrow[p]{} Y$ fiber 束, X: パラコンパクト, ハウスドルフ

- $g : X \times I \to Y$ conti $g_0 := g|_{X\times\{0\}}$
- g_0 の E への lift $f : X \to E$ conti (s.t. $p \circ f = g_0$)

が与えられたとする

このとき $\tilde{f} : X \times I \to E$ conti が存在して

$\tilde{f}|_{X\times\{0\}} = f$, $p \circ \tilde{f} = g$ が成立する

$$\begin{tikzcd} X \times \{0\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] & Y \end{tikzcd}$$

「map $g_0 : X \to Y$ および その lift $f : X \to E$ が与えられたとする

g_0 を homotopic に変形するとき lift f も共に変形できる」

このことを「$E \to Y$ は X に対して CHP を持つ」ということにする.

No.

Date

☺ $g^*E \longrightarrow X \times I$ を使って考える.

f を与える $\longleftrightarrow$ g^*E の $X \times \{0\}$ 上での section

$s(x,0) = ((x,0), f(x))$ を与える

$\tilde{f}$ を与える $\longleftrightarrow$ section s の $X \times I$ への拡張を与える

前の定理より $g^*E = \left(g^*E \big|_{X \times \{0\}} \right) \times I$ ゆえ s は $X \times I$ に拡張できる.

$\boxed{\text{注意}}$ X: paracpt, Hausd の代わりに Y: paracpt Hausdorff を仮定してもよい

「Fiber Bundles」 Husemoller Chap 4, §9 を参照

定義 $p: E \to Y$ (連続) が任意の位相空間 X に対して ($X = I^n$, ($\forall n$) に対して) CHP を持つとき fibration (Serre fibration) という. [technical なので省略

$$\begin{tikzcd} X \times \{0\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dashed, "\exists"] & Y \end{tikzcd}$$

長ホモトピー完全列 $p: X \to Y$ Serre fibration

$y \in Y$, $F := p^{-1}(y)$, $x \in F$ に対して

$$\to \pi_n(F, x) \xrightarrow[i_*]{} \pi_n(X, x) \xrightarrow[p_*]{} \pi_n(Y, y) \xrightarrow[\partial]{} \pi_{n-1}(F, x) \to \cdots$$

なる長完全列がある.

CHPを使って比較的容易にギロンできる

[Hatcher, 定理 4.41]

π_n : X :

Algebraic Topology

S^1束のオイラー類

森田「微分形式の幾何学」第6章

$E \to X$ 主S^1束 とは 向き付けられた S^1 を fiber とする fiber束

（つまり 構造群が S^1の向きを保つ自己同相 $\mathrm{Homeo}_+(S^1)$ に含まれる.）

$e(E) \in H^2(X, \mathbb{Z})$ オイラー類

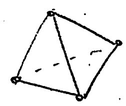
No.

Date

- 障害類 (obstruction class) として
- Čech cohomology
- 曲率 (de Rham コホモロジー)

<u>単体複体の復習</u>

三角形に割られた空間

 $\cong S^2$

V : 頂点の集合

$S \subset 2^V$: Vの有限部分集合の族 (Sの元 $\longleftrightarrow$ 単体)

$K = (V, S)$ が次をみたすとき 抽象単体複体 という

(1) $v \in V \Rightarrow \{v\} \in S$

(2) $\sigma \in S$, $\tau < \sigma \Rightarrow \tau \in S$

$V = \{1, 2, 3, 4\}$, $S = 2^V \setminus \{V\}$ $\longleftrightarrow$ 四面体

$S_n = \{\sigma \in S \mid \#\sigma = n+1\}$ n単体

V に 全順序を fix しておく

$\sigma \in S_n$ に対して σの元をこの順序で並べて

$\sigma = \{v_0, v_1, \cdots, v_n\}$ $v_1 < v_2 < \cdots < v_n$ と書く

$\Delta_n = \{(t_0, \cdots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t_i \geq 0,\ t_0 + \cdots + t_n = 1\}$

標準 n単体

No.

Date

face map
$$\begin{cases} \partial_i : S_n \longrightarrow S_{n-1} \\ \sigma = \{v_0, \dots, v_n\} \longmapsto \partial_i\sigma = \{v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n\} \\ \partial^i : \Delta_{n-1} \longrightarrow \Delta_n \\ (t_0, \dots, t_n) \longmapsto (t_0, \dots, t_{i-1}, \underset{i\text{番目}}{0}, t_i, \dots, t_n) \end{cases}$$

$0 \leq i \leq n$

$K = (V, S)$ の幾何学的実現

$$|K| := \coprod_{n=0}^{\infty} (\Delta_n \times \underbrace{S_n}_{\text{離散集合}}) \Big/ (\partial^i u, \sigma) \sim (u, \partial_i \sigma)$$

$u \in \Delta_{n-1}, \sigma \in S_n \quad 0 \leq i \leq n$

の生成する同値関係

- 位相空間 X の <u>単体分割</u> とは 単体複体 K と

同相写像 $\phi : |K| \cong X$ の組 のこと

- $\sigma \in S$ に対して $|\sigma| = \Delta_n \times \{\sigma\}$ の $|K|$ での像

$$|K|^{(n)} = \bigcup_{\sigma \in S_0 \cup \dots \cup S_n} |\sigma| \quad : \text{n-skeleton}$$

<u>単体(コ)ホモロジー</u>　　R : 可換環 $(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \dots)$

C_n = S_n を基底とする自由 R 加群

$$= \left\{ \sum_{i=1}^{k} a_i [\sigma_i] \;\middle|\; a_i \in R, \ \sigma_i \in S_n \right\}$$

No.

Date

$$\partial : C_n \longrightarrow C_{n-1} \qquad \partial[\sigma] = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i [\partial_i \sigma]$$

問　$[\sigma]$の向き：　Δ_n の座標 $(t_1, \cdots, t_n)$ により決まる向き

$\rightsquigarrow$　$\partial[\sigma]$ に誘導される向き と 上の公式は 一致する

$\partial \circ \partial = 0$ がいえて　$H_n(K, R) := H_n(C_*, \partial)$

$$= \frac{\mathrm{Ker}(\partial : C_n \to C_{n-1})}{\mathrm{Im}(\partial : C_{n+1} \to C_n)}$$

$C^n := \mathrm{Hom}(C_n, R) \cong R^{S_n}$

$\delta : C^n \to C^{n+1}$ が　∂ の双対として 定まる.

$H^n(K, R) = H^n(C^*, \delta)$　← $|K|$の位相不変量になる.

2021/5/11

Euler類（障害類）

$X \cong |K|$　単体分割 の与えられた位相空間 X.

$E \to X$　向き付けられた S^1束

・各単体$|\sigma|$上で　Eは 自明　$E|_{|\sigma|} \cong |\sigma| \times S^1$

[∵ $|\sigma|$は 可縮]

・0単体 v に対して　$e_v \in E_v$ をとる

・1単体 $\tau = \{v_0, v_1\}$ に対して　$|\tau|$上の Eの section　$s_\tau : |\tau| \to E|_{|\tau|}$