⑥ 双対, テンソル, $\mathcal{H}om$, 外積 ...

$E \to X$ $\mathbb{C}$ベクトル束

$$E^* = \bigsqcup_{x \in X} E_x^* \qquad E_x^* = \mathrm{Hom}(E_x, \mathbb{C})$$

$F \to X$: 別の $\mathbb{C}$ベクトル束

$$E \otimes F = \bigsqcup_{x \in X} E_x \otimes F_x$$

$$\mathrm{Hom}(E, F) = \bigsqcup_{x \in X} \mathrm{Hom}(E_x, F_x) = \bigsqcup_{x \in X} E_x^* \otimes F_x$$

$$\Lambda^p E = \bigsqcup_{x \in X} \Lambda^p E_x$$

問 Eの ある局所自明化に関する変換関数 $(g_{\alpha\beta})$
F $(h_{\alpha\beta})$
$\longrightarrow$ E^*の変換関数
$({}^t g_{\alpha\beta}^{-1})$

$E \otimes F$: $g_{\alpha\beta} \otimes h_{\alpha\beta}$

<u>ファイバー束のホモトピー性質</u>

<u>定理</u> X: paracpt Hausdorff, $E \to X \times I$ fiber束 $(I = [0,1])$

$\pi : X \times I \to X \times \{1\}$ projection

$\Rightarrow$ ${}^\exists$同型 $\phi : E \xrightarrow{\cong} \pi^*(E|_{X \times \{1\}}) = E|_{X \times \{1\}} \times I$

s.t. $\phi|_{X \times \{1\}} = id$ 特に $E|_{X \times \{0\}} \cong E|_{X \times \{1\}}$

No.

Date

証明のためにいくつかLemmaを用意する

<u>Lem</u> $E \to X \times [a,c]$ $a \leqq b \leqq c$ fiber束

$E|_{X\times[a,b]}$, $E|_{X\times[b,c]}$ が自明 $\Rightarrow$ Eは自明

(∵)

$\phi_1 : E|_{X\times[a,b]} \cong (X\times[a,b])\times F$

$\phi_2 : E|_{X\times[b,c]} \cong (X\times[b,c])\times F$ 　自明化をとる

変換関数 $g : X\times F \xrightarrow[(\phi_2|_{X\times\{b\}})^{-1}]{} E|_{X\times\{b\}} \xrightarrow[\phi_1|_{X\times\{b\}}]{} X\times F$

ϕ_2を次の自明化 $\tilde{\phi}_2$ にとりかえる

$\tilde{\phi}_2 : E|_{X\times[b,c]} \xrightarrow[\phi_2]{\cong} (X\times[b,c])\times F \cong X\times F\times[b,c] \xrightarrow[g\times id]{\cong} X\times F\times[b,c] \cong (X\times[b,c])\times F$

$\tilde{\phi}_2\Big|_{X\times\{b\}} = \phi_1\Big|_{X\times\{b\}}$ 　$X\times\{b\}$上では一致する

$\Rightarrow$ ϕ_1と$\tilde{\phi}_2$をはり合わせて $E \underset{\phi}{\cong} (X\times[a,c])\times F$ を得る

(注) $\left[f : X \to Y \text{ が contin} \iff \begin{array}{l} X = X_1 \cup X_2 \quad X_i : \text{closed} \\ f|_{X_i} : X_i \to Y \text{ は連続} \end{array} \right]$

を ϕ 及び ϕ^{-1} に適用する。

No.

Date

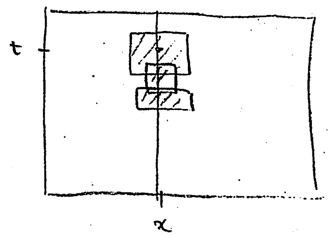
Lem $E \longrightarrow X \times I$ fiber束

$\forall x \in X$ $\exists$ xの open nbd $U \subset X$ s.t. $E|_{U \times I}$ は自明

∵ 各 $t \in I$ に対して $\exists$ xの open nbd $U(t)$

$\exists$ tを含む開区間 $J(t)$ s.t. $E|_{U(t) \times J(t)}$

は自明



Iのコンパクト性より

$$I = J(t_1) \cup \cdots \cup J(t_k)$$

$U = U(t_1) \cap \cdots \cap U(t_k)$ として前のLemmaを適用

定理の証明

Lemmaより Xの open cover $\exists\{U_\alpha\}$ s.t. $E|_{U_\alpha \times I}$ は自明

- $\{U_\alpha\}$が有限 $\{U_\alpha\}_{\alpha=1}^{m}$ であるときに示す。

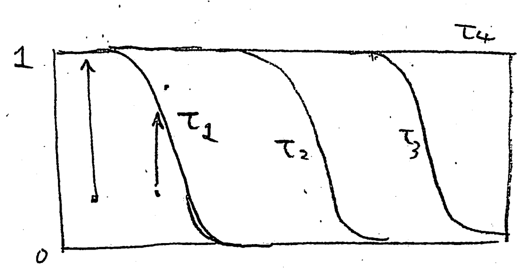
$$h_\alpha : (U_\alpha \times I) \times F \xrightarrow{\cong} E|_{U_\alpha \times I} \quad \text{自明化}$$

$\{\rho_\alpha\}$: 1の分割 $\operatorname{Supp} \rho_\alpha \subset U_\alpha$

$\tau_\alpha = \rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_\alpha$ とおく

$\tau_0 \equiv 0$, $\tau_m \equiv 1$

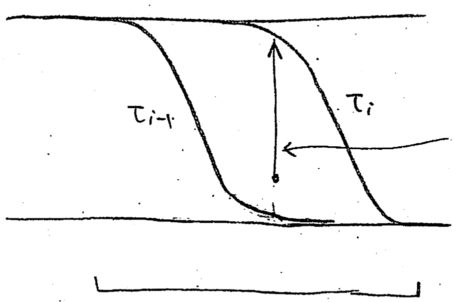
$0 = \tau_0 \le \tau_1 \le \cdots \le \tau_m = 1$



$r_\alpha : X \times I \longrightarrow X \times I$ を $r_\alpha(x, t) = (x, \max(\tau_\alpha(x), t))$ とおく

$$r_0 = id,\quad r_m(x,t) = (x, 1)$$

<u>方針</u> $E \cong r_1^*E \cong r_2^*E \cdots \cong r_m^*E = \pi^*(E|_{X\times\{1\}})$ を示す



自明化によってfiberを
同一視できる

$\mathrm{Supp}\,\rho_i$

同型 $r_{\alpha-1}^*E \cong r_\alpha^*E$ をここで定義する

- $U_\alpha\times I$ 上では

$$\begin{array}{ccc} r_{\alpha-1}^*E|_{U_\alpha\times I} & \longrightarrow & r_\alpha^*E|_{U_\alpha\times I} \\ \wr\wr & & \wr\wr \\ & (U_\alpha\times I)\times F & \end{array}$$

$$(x,t,h_\alpha(r_{\alpha-1}(x,t),f)) \longmapsto (x,t,h_\alpha(r_\alpha(x,t),f))$$

- $(\mathrm{Supp}\,\rho_\alpha)^c\times I$ 上では

$$r_{\alpha-1}^*E\Big|_{(\mathrm{Supp}\,\rho_\alpha)^c\times I} \longrightarrow r_\alpha^*E\Big|_{(\mathrm{Supp}\,\rho_\alpha)^c\times I}$$

は identity map [$(\mathrm{Supp}\,\rho_\alpha)^c\times I$ 上で $r_{\alpha-1} = r_\alpha$ に注意]

この同型は $X\times\{1\}$ では identity map である

No.

Date

・ $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ が無限とつのとき　・ Aに整列順序を入れる

・ 1の分割 $\{\rho_\alpha\}$ をとる　(Supp ρ_α : locally finite)

$$r_\alpha = \sum_{\beta \leqq \alpha} \rho_\beta$$

⇝ localには有限回の写像の合成で同型がつくれている

$$E \cong r_{\alpha_1}^* E \cong \cdots \cong r_{\alpha_k}^* E \cong E$$

on $U \times I$

系　X: paracompact, Hausdorff, $E \to Y$ fiber束

$f, g : X \to Y$　$f \simeq g$: homotopic　(i.e. $\exists H : X \times I \to Y$　$f(x) = H(x,0)$　$g(x) = H(x,1)$)

$\Rightarrow f^*E \cong g^*E$

∵ $\left(\begin{aligned} f^*E &= H^*E \,|_{X\times\{0\}} \\ g^*E &= H^*E \,|_{X\times\{1\}} \end{aligned} \right)$ であることから

系　X: 可縮なparacpt Hausdorff空間

$\Rightarrow$ X上のfiber束は自明

∵ Xが可縮 $\Longleftrightarrow$ Xは1点とホモトピー同値

$\Longleftrightarrow$ $pt \underset{\pi}{\overset{\exists c}{\rightleftarrows}} X$　$c\circ\pi \simeq id_X$

[$\pi\circ c = id_{pt}$ は自明に成立]

$E \to X$: fiber束　$E = id_X^* E \cong (c\circ\pi)^* E$

$= \pi^*(X|_c) \cong X|_c \times F$

No.

Date

上の定理のベクトル束 version

定理　X: paracompact, Hausdorff,　$E \to X \times I$　ベクトル束

$\Rightarrow$ $^\exists \phi : E \cong \pi^*(E|_{X\times\{1\}})$　同型　s.t.　$\phi|_{X\times\{1\}} = id$

(∵) 同型がベクトル束の同型にとれる事を示したい

ここのfiber束を考える　$F = \pi^*(E|_{X\times\{1\}})$　とおく

$$\begin{array}{c} Iso(E, F) \\ \downarrow \\ X \times I \end{array}$$

: 点 (x,t) でのfiberは 線型同型写像

$\varphi : E_{(x,t)} \xrightarrow{\cong} F_{(x,t)}$　全体

$Iso(E, F)$ は $X \times \{1\}$ 上で section を持つ　$\left(\because \; E|_{X\times\{1\}} = F|_{X\times\{1\}} \right)$

$Iso(E, F) \cong \left(Iso(E, F)|_{X\times\{1\}} \right) \times I$　$(\because$ 前の定理より$)$

よってこの section は $X \times I$ 上に拡張する

$\therefore \; E \cong F$

//

系　$f \simeq g : X \to Y$ homotopic　X: paracompact Hausdorff

$E \to Y$ ベクトル束　$\Rightarrow$　$f^*E \cong g^*E$

この仮定の代わりに Yがパラコンパクトハウスドルフと仮定にも成立する

系　可縮なパラコンパクトハウスドルフ空間上のベクトル束は自明

No.
Date

問 XとYがホモトピー同値な paracpt Hausdorff 空間

$\Rightarrow$ $\left\{ \begin{array}{c} X\text{上のベクトル束} \\ \text{の同型類} \end{array} \right\} \overset{1:1}{\cong} \left\{ \begin{array}{c} Y\text{上のベクトル束} \\ \text{の同型類} \end{array} \right\}$

<u>主G束</u>

G: 位相群 (実際考えるのは Lie群 ($GL_n(\mathbb{C})$ など) が多い)

[位相が入った群で $\begin{array}{ccc} G\times G & \to & G \\ (x, y) & \mapsto & xy \end{array}$, $\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & x^{-1} \end{array}$ が連続]

<u>定義</u>

主G束とは Gをfiberとする fiber束 $P \longrightarrow X$ であって
(principal G-bundle)

(1) PはGの右作用を持つ

$\begin{array}{ccc} P\times G & \longrightarrow & P \\ (p, g) & \longmapsto & p\cdot g \end{array}$ conti

$p\cdot 1_G = p$
$p\cdot(g_1 g_2) = (p\cdot g_1)\cdot g_2$

(2) $\forall x \in X$ $\exists U$: xの open nbd

$\exists$ 局所自明化 $P|_U \overset{\phi}{\cong} U\times G$

$\searrow U \swarrow$

$U\times G$ に Gの右作用を $(u, g)\cdot g' = (u, gg')$ と定めるとき

ϕは G同変 $\Leftrightarrow$ $\phi(p\cdot g) = \phi(p)\cdot g$ $\quad (p \in P|_U,\ g\in G)$

主G束 $\rightsquigarrow$ fiber束, ベクトル束

No.

Date

$G \times F \longrightarrow F$　　Gの連続な左作用

$\pi : P \to X$　主G束

$\Rightarrow$　Fをfiberとするfiber束（同伴fiber束）が

$$P \times_G F := P \times F \big/ (p\cdot g, f) \sim (p, g\cdot f) \quad \forall g \in G$$

$$\pi : P \times_G F \to X \qquad \pi[p, f] = \pi(p)$$

・どうしてfiber束になるか？　localには $P|_U = U \times G$

$$(U \times G) \times_G F \cong U \times F$$

$$[(u, g), f] \longmapsto (u, g\cdot f)$$

・このfiber束の変換関数は「Gに値をとる」ことを確認せよ　↑

2021/4/27

この部分は（構成の都合上）あとで話す

例　$G = GL_n(\mathbb{C})$　　$GL_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$　ベクトル表現

$$(g, v) \longmapsto g\cdot v$$

主 $GL_n(\mathbb{C})$ 束 $P \to X$ $\longrightarrow$ $\mathrm{rank}_{\mathbb{C}}\, n$ のベクトル束 $E = P \times_{GL_n(\mathbb{C})} \mathbb{C}^n$

$\longleftarrow$

逆の構成：frame bundle　$E \to X$：ベクトル束

$$Fr(E) = \bigsqcup_{x \in X} \{ (v_1, \dots, v_n) \in E_x^n \mid v_1, \dots, v_n \text{ は } E_x \text{ の basis} \}$$

$GL_n(\mathbb{C})$ の右作用　$(v_1, \dots, v_n) \longmapsto (v_1, \dots, v_n) \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & & \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix}$