No.

Date

注 M: C^∞多様体

$E \to M$ が C^∞級ベクトル束 $\longleftrightarrow$ C^∞級変換関数

$$g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$$

[M: 複素多様体

$E \to M$ が正則ベクトル束 $\longleftrightarrow$ $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to GL_n(\mathbb{C})$ が正則]

2021/4/12

自明なベクトル束の判定条件

$\mathbb{C}$ベクトル束 $E \xrightarrow{p} M$ が自明 $\Longleftrightarrow$

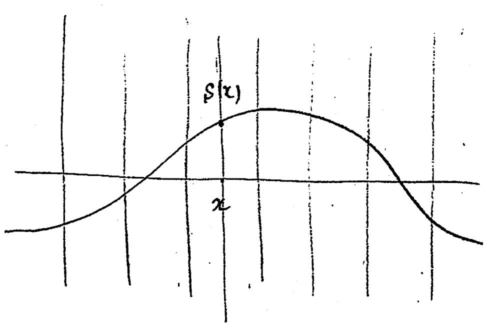
ベクトル束の同型

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "p"'] & & M \times \mathbb{C}^n \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

定義 $p: E \to M$ ベクトル束(もっと一般に fiber束)

の切断(section)とは 連続写像 $s: M \longrightarrow E$ で $p \circ s = id_M$

を満たすもの



E

$\downarrow p$

M

$s(x) \in E_x$

No.
Date

定義 $\operatorname{rank} E = n$ $U \subset M$ open set

$E|_U$ の section $s_1, \cdots, s_n$ が <u>frame</u>（枠）であるとは

${}^\forall x \in U$ に対して $\{s_1(x), \cdots, s_n(x)\}$ が E_x の basis になること

Prop $E \to M$ が自明 $\iff$ E の M 全体での frame $s_1, \cdots, s_n$ が存在する

$\because$

$(\Rightarrow)$ $E \cong M \times \mathbb{C}^n$ のとき
$$s_i : M \longrightarrow M \times \mathbb{C}^n \cong E$$
$$x \longmapsto (x, e_i)$$

は frame を与える

$(\Leftarrow)$ $\{s_1, \cdots, s_n\}$ を枠とすると

$$\Phi : M \times \mathbb{C}^n \longrightarrow E$$
$$\left(x, \sum_i v_i e_i\right) \longmapsto \sum_{i=1}^n v_i s_i(x)$$ とおくと

- Φ は各 fiber で線形同型
- Φ は同相（E の局所自明化をつかって check できる）

Cor 直線束 $L \to M$ が自明 $\iff$ 至る所 0 でない切断 $s : M \to L$ が存在する

$[\ {}^\forall x \in M$ に対して $s(x) \neq 0\ ]$

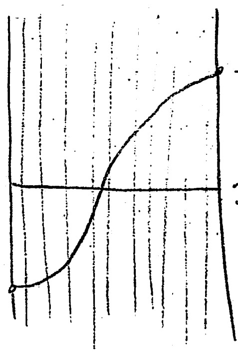
定義 零切断（0-section）とは ${}^\forall x \in M$ に対して E_x の零ベクトル 0 を対応させる切断 $0 : M \longrightarrow E$ のこと

No.

Date

(例) Mobiusの帯は 至る所0でない切断をもつか? ~> もたない。

$$\mathbb{R}\times[0,1]/\sim$$
$$\downarrow$$
$$[0,1]/\sim$$



Mobiusの帯の section $\Longleftrightarrow$ $f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ 連続写像

$$f(1) = -f(0)$$

- $f(0)=0$ なら 零点をもつ
- $f(0)\neq 0$ なら 中間値の定理より $f(x)$ は零点をもつ

(問) tautological line bundle $L \longrightarrow \mathbb{CP}^1$

は至る所消えない section を持たないことを示せ

(ヒント) もしあれば $s: \mathbb{CP}^1 \longrightarrow \mathbb{C}^2\setminus\{0\}$, $\pi: \mathbb{C}^2\setminus 0 \to \mathbb{CP}^1$

$\pi\circ s = id$ (コ)ホモロジーをとる.

ベクトル束の計量 $E \to M$ ($\mathbb{C}$ベクトル束) の (エルミート)計量 とは

各fiberに正定値エルミート計量 $h_x: E_x \otimes \overline{E_x} \longrightarrow \mathbb{C}$

が与えられ、xについての連続なもの.

No.

Date

局所自明化 $E|_U \cong U \times \mathbb{C}^n$ の下で

$h_x(e_i, e_j)$ は x の連続関数.

注 ・C^∞級ベクトル束に対しては C^∞級計量が定義される

・$\mathbb{R}$ベクトル束の実計量も同様に定義される

<u>Prop</u> paracompact Hausdorff 空間 M 上のベクトル束は計量をもつ

∵ $E \longrightarrow M$ ベクトル束

$\exists$ Mの open covering $\{U_\alpha\}$ $E|_{U_\alpha} \cong U_\alpha \times \mathbb{C}^n$ 局所自明化

パラコンパクト ハウスドルフ空間の性質

$\left(\begin{array}{l} \exists \text{ 連続な } 1\text{の分割 } \rho_\alpha : M \longrightarrow [0,1] \\ \quad \operatorname{Supp} \rho_\alpha \subset U_\alpha, \quad \operatorname{Supp} \rho_\alpha \text{ は locally finite} \end{array} \right.$

を使う

U_α 上では自明化を使って計量 h_α を定める ($\mathbb{C}^n$の標準計量を使う)

$$h_x(u, v) := \sum_\alpha \rho_\alpha(x)\, h_\alpha(u, v) \qquad u, v \in E_x$$

h_x は各点で正定値エルミート内積

$$h_x(u, u) = \sum \underbrace{\rho_\alpha(x)}_{\text{どれかは正}}\, h_\alpha(u, u) > 0 \qquad u \neq 0$$

No.

Date

(問) エルミート内積のかわりに 非退化な $\mathbb{C}$-bilinear pairing

$$Q_x : E_x \otimes E_x \longrightarrow \mathbb{C}$$

(で各点 x に連続に依存するもの) はどんなベクトル束に対しても

作れるか?

Prop $E \to M$ エルミート(or 実)計量 h をもつ

$\forall x \in M$ $\exists$ x の open nbd $U \subset M$

$\exists$ $s_1, \cdots, s_n$: $E|_U$ の frame s.t. $h(s_i(x), s_j(x)) = \delta_{ij}$ $\forall x \in U$

[このような枠を正規直交枠という]

(∵) x の近傍での自明化 $E|_U \cong U \times \mathbb{C}^n$ をとる

$\Longleftrightarrow$ U 上の E の fram $\tilde{s}_1, \cdots, \tilde{s}_n$

$\tilde{s}_1, \cdots, \tilde{s}_n$ に対して Gram-Schmidt の直交化法を施すとよい

$$s_1(x) = \frac{\tilde{s}_1(x)}{\|s_1(x)\|}$$

← x について 連続

$$s_2(x) = \frac{s_2(x) - h(s_2(x), s_1(x))\ s_1(x)}{\| \quad〃 \quad \|}$$

$\vdots$

系 $E \to X$: パラコンパクト Hausdorff 空間上のベクトル束に対して

その自明化をうまくとれば変換関数が全て $U(n)$ (又は $O(n)$)

に値をとるようにできる

No.

Date

~~Eに計量を入れる~~

∵ 正規直交枠に付随する局所自明化をとればよい

- 変換関数が値をとる群を <u>構造群</u> (structure group) という

上の命題は任意の $\mathbb{C}$ベクトル束の構造群を $GL(n, \mathbb{C})$ から $U(n)$

にとり直せることを言っている 「$U(n)$への reduction」という

- <u>fiber束の構造群</u>

$E \to M$ 　 F を fiber とする fiber束

$E|_{U_\alpha} \cong U_\alpha \times F$ 　 local trivialization

$\rightsquigarrow$ $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to \underbrace{\mathrm{Homeo}(F)}_{F\text{の自己同相群}}$ なる変換関数が得られる

$g_{\alpha\beta}$ が ある部分群 $G \subset \mathrm{Homeo}(F)$ に値をとるとき <u>Gを構造群とする fiber束</u> という

(13) ベクトル束に付随する fiber束

$E \to M$ $\mathbb{C}$ vector束 (計量をとる)

$$S(E) = \bigcup_{x \in M} \{ v \in E_x \mid \|v\| = 1 \}$$ sphere bundle (fiber は S^{2n-1})

$$D(E) = \bigcup_{x \in M} \{ v \in E_x \mid \|v\| \leqq 1 \}$$ disc bundle (fiber は D^{2n})

$$Fr(E) = \bigcup_{x \in M} \{ (v_1, \cdots, v_n) \in E_x^n \mid (v_1, \cdots, v_n) \text{ は } E_x \text{の basis} \}$$

frame bundle (fiber は $GL(n, \mathbb{C})$)

No.

Date

ベクトル束に対する操作

① 引き戻し (pull-back) $E \xrightarrow{p} X$ ベクトル束 (fiber束も可)

$f : Y \to X$ conti map

$$f^*E = \{ (y, e) \in Y \times E \mid f(y) = p(e) \}$$

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \to & E \\ \downarrow & \square & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

$\tilde{p} : f^*E \longrightarrow Y$

$\tilde{p}(y, e) = y$ と定める

⇒ $\tilde{p}$ は Y 上のベクトル束になる (演習)

$$(f^*E)_y = E_{f(y)}$$

㊟ $Y \subset X$ 部分集合のとき $i : Y \hookrightarrow X$ 包含写像

$i^*E = E|_Y$ 「Yへの制限」と同じ

② Whitney 和 $E \xrightarrow{p} X$, $F \xrightarrow{q} X$ ベクトル束 (又は fiber束)

$$E \oplus F = \{ (e, f) \in E \times F \mid p(e) = q(f) \}$$

$$\downarrow$$

$$X$$

$(e, f) \mapsto p(e) = q(f)$

はベクトル束になる (fiber束のときは $E \times_X F$ と書くことが多い)

No.

Date

(注) ①, ② の定義の類似性 (いわゆる「fiber積」)

③ 部分ベクトル束

$$\left.\begin{array}{l} E \xrightarrow{p} X \\ F \xrightarrow[q]{} X \end{array}\right\}$$ ベクトル束

位相空間の埋め込み $i: F \hookrightarrow E$ (i.e. $i: F \longrightarrow i(F)$ が homeo)

が次をみたすとき F を E の部分ベクトル束という

- $$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, hook, "i"] \arrow[dr, "p"'] & & E \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd}$$ は可換
- i は fiber の間の線形写像 $i_x: F_x \to E_x$ を誘導する

(問) 連続写像 $f: F \to E$ が

- $$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & \circlearrowleft & E \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd}$$ 可換 かつ
- $f_x: F_x \to E_x$ は線形単射

ならば f は埋めこみになることを示せ

④ 商ベクトル束 $F \subset E$ 部分ベクトル束

$$E/F = \bigsqcup_{x \in X} E_x/F_x$$

このとき $0 \to F \longrightarrow E \longrightarrow E/F \to 0$ (と同型な列)

をベクトル束の小完全列 (short exact sequence) という。

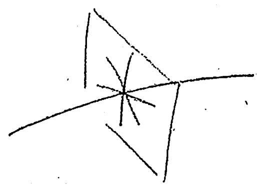
No.

Date

例4　M: C^∞ 多様体，　$S \subset M$：部分多様体

$TS \subset TM|_S$ は部分ベクトル束になる

$N_{S/M} := TM|_S / TS$ を S の normal bundle という



S

⑤ 直交補束

$E \to X$ 計量 h を持つ

$F \subset E$ 部分ベクトル束 $\rightsquigarrow$ $F^\perp = \bigsqcup_{x \in X} F_x^\perp$

はベクトル束になる

さらに $E = F \oplus F^\perp$

$E/F \cong F^\perp$

系　パラコンパクトハウスドルフ空間上のベクトル束の短完全列は分裂する

$$0 \to F \to E \to E/F \to 0 \quad (\text{exact})$$

$\rightsquigarrow$ 計量を入れると　$E = F \oplus F^\perp \cong F \oplus E/F$

2021/4/20