No.

Date

$\mathbb{C}P^{2k-1} \longrightarrow \mathbb{H}P^{k-1}$ S^2 束がある

ので $T\mathbb{C}P^{2k-1}$ は line subbdle を持つ

(334) $\mathbb{C}P^n$ 上の line bdl

$$\mathcal{O}(k) = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C} \Big/ (x_0, \cdots, x_n, v) \sim (\lambda x_0, \cdots, \lambda x_n, \lambda^k v)$$

本当は sheaf を表す記号だがここでは直線束を表す

$\lambda \in \mathbb{C}^\times$

$\mathcal{O}(k) \to \mathbb{C}P^n$ は $\mathbb{C}$ line bdl

$[x_0, \cdots, x_n, v] \longmapsto [x_0, \cdots, x_n]$

演習

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{O}(-1) \cong \text{tautological line bdl } L \\ \mathcal{O}(-k) = \mathcal{O}(k)^* \quad \text{dual line bdl} \\ \mathcal{O}(k) \otimes \mathcal{O}(l) \cong \mathcal{O}(k+l) \end{array}\right.$$

$\mathcal{O}(k) = L^{\otimes k}$

$k > 0$ とする.

$F(x_0, x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}[x_0, \cdots, x_n]$ k次斉次多項式は $\mathcal{O}(k)$ の section を定める

$$\begin{array}{ccc} [x_0, \cdots, x_n] & \longmapsto & [x_0, \cdots, x_n, F(x_0, \cdots, x_n)] \\ \cap & & \cap \\ \mathbb{C}P^n & \longrightarrow & \mathcal{O}(k) \end{array}$$

この section が transversal であるとき $V = F^{-1}(0) \subset \mathbb{C}P^n$

は滑らかな複素多様体

(k次超曲面)

<u>$k=1$ のとき</u> $\quad F^{-1}(0) \cong \mathbb{CP}^{n-1} \quad$ hyperplane

$$\mathbb{CP}^{n-1} \text{ の Poincaré dual} = e(\mathcal{O}(1)) = -c_1(L) = x$$

と書いた

x のことを「hyperplane class」と呼ぶ

$$PD(x) = \text{hyperplane} \cong \mathbb{CP}^{n-1}$$

$$PD(x^2) = \text{2つの hyperplane の交わり} \cong \mathbb{CP}^{n-2}$$

(横断的な)

$\vdots$

$$PD(x^n) = 1\text{点} \qquad x^{n+1} = 0$$

<u>$k \geq 1$ 一般</u> $\quad V = F^{-1}(0)$

$$0 \to TV \to T\mathbb{CP}^n\big|_V \to N_{V/\mathbb{CP}^n} \to 0 \qquad \text{exact}$$

$$N_{V/\mathbb{CP}^n} \cong \mathcal{O}(k)\big|_V$$

$$\Rightarrow \quad c(TV) = \frac{c(T\mathbb{CP}^n)\big|_V}{c(\mathcal{O}(k))\big|_V} = \frac{(1+x)^{n+1}}{1+kx}$$

$$= 1 + (n+1-k)x + \left(k^2 + \binom{n+1}{2} - k(n+1)\right)x^2 + \cdots$$

<u>定理</u> 滑らかな k次超曲面 $V \subset \mathbb{CP}^n$ に対して

$$\chi(V) = n+1 + \frac{1}{k}\left((1-k)^{n+1} - 1\right)$$

No.

Date

∵ $\chi(V) = \int_V e(TV) = \int_V c(TV)$

$$= \int_V \frac{(1+x)^{n+1}}{1+kx}$$

$$= \int_{\mathbb{CP}^n} \frac{(1+x)^{n+1}}{1+kx} \wedge \eta_V \qquad \eta_V = e(\mathcal{O}(k)) = kx$$

$$= \int_{\mathbb{CP}^n} \underbrace{\frac{(1+x)^{n+1}}{1+kx} kx}_{}$$

この x^n の係数を見ればよい (演習)

例 $n=2$, $F(x_0, x_1, x_2)$: $\mathcal{O}(k)$ の transversal section

$V = (F=0) \subset \mathbb{CP}^2$ は連結な一次元複素多様体であることが分かる.
(Riemann 面)

$\chi(V) = 2-2g \qquad g$: 種数 $\left(= \frac{1}{2} \dim H^1(V)\right)$

上の結果から g を求めると $g = \frac{1}{2}(k-1)(k-2)$

Chern 指標 (Chern character) $\mathbb{Q}$ 上定義される

$E \longrightarrow X$ $\mathbb{C}$ ベクトル束 $\delta_1, \cdots, \delta_r$: Chern roots

$$c(E) = (1+\delta_1)\cdots(1+\delta_r)$$

$$\mathrm{ch}(E) := e^{\gamma_1} + \cdots + e^{\gamma_r} \in \prod_{n=0}^{\infty} H^{2n}(X;\mathbb{Q})$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{ch}_k(E) = \dfrac{1}{k!}(\gamma_1^k + \cdots + \gamma_r^k) & \text{power sum} \quad p_k \\ c_k(E) = \displaystyle\prod_{j_1 < \cdots < j_k} \gamma_{j_1} \cdots \gamma_{j_k} & \text{elementary symm fcn} \quad e_k \end{array} \right.$$

Newtonの公式 $\{p_k\} \longleftrightarrow \{e_k\}$

$\mathrm{ch}_k(E)$ は $c_1(E), \cdots, c_k(E)$ の $\mathbb{Q}$係数多項式で書ける.

$$\mathrm{ch}_0(E) = r = \mathrm{rank}\, E$$

$$\mathrm{ch}_1(E) = \gamma_1 + \cdots + \gamma_r = c_1(E)$$

$$\mathrm{ch}_2(E) = \frac{1}{2}(\gamma_1^2 + \cdots + \gamma_r^2) = \frac{1}{2}(\gamma_1 + \cdots + \gamma_r)^2 - \sum_{i<j} \gamma_i \gamma_j$$

$$= \frac{1}{2} c_1(E)^2 - c_2(E)$$

<u>Prop</u> (1) $\mathrm{ch}(E \otimes F) = \mathrm{ch}(E)\,\mathrm{ch}(F)$

(2) $\mathrm{ch}(E \oplus F) = \mathrm{ch}(E) + \mathrm{ch}(F)$

(3) $\mathrm{ch}_i(E^*) = (-1)^i \,\mathrm{ch}_i(E)$

☺ (1) のみ示す. $\{e_i\}$, $\{f_j\}$ を E, F の Chern root とすると

$\{e_i + f_j\}$ が $E \otimes F$ の Chern root となる.

$$\mathrm{ch}(E \otimes F) = \sum_{i,j} e^{e_i + f_j} = \sum_{i,j} e^{e_i} e^{f_j} = \mathrm{ch}(E)\,\mathrm{ch}(F)$$

//

No.

Date

実ベクトル束の特性類

Stiefel-Whitney 類, Pontrjagin 類

(実 version の Chern 類)

SW類 $E \to X$ rank r 実ベクトル束 に対し

$$w(E) = 1 + w_1(E) + \cdots + w_r(E) \in H^*(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

$w_i(E) \in H^i(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ を対応させるもの.

実 line bdle L に対して $w_1(L) := s^* \Theta_{\mathbb{Z}/2}$ と定める

$\Theta_{\mathbb{Z}/2} \in H^1(L, L \setminus X; \mathbb{Z}/2)$

$\mathbb{Z}/2$ 係数の Thom 類

注 Čech コホモロジーでの定義

$\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$: good open cover $\quad g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to \mathbb{R}^\times$ 変換関数

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \begin{cases} \bar{1} & \text{if } g_{\alpha\beta} < 0 \\ \bar{0} & \phantom{\text{if }} g_{\alpha\beta} > 0 \end{cases}$$

とおくと $w_1(L) = [\{\varepsilon_{\alpha\beta}\}] \in \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}/2)$

問 この定義が Thom 類を使った定義と一致することを示せ.

Prop X: パラコンパクト ハウスドルフ空間

$$\{X \text{ 上の実直線束}\}/\cong \xrightarrow{1:1} H^1(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \quad \text{は同型}$$

$$L \longmapsto w_1(L)$$

さらに $w_1(L_1 \otimes L_2) = w_1(L_1) + w_1(L_2)$

No.

Date . .

前と同様に $w_1(L)$ から一般の $w_i(E)$ を構成できる

$E \to X$ 実ベクトル束 $\rightsquigarrow$ $\mathbb{P}(E) \to X$ 実射影束

$\uparrow$

L : tautological (実) line bdle

$$x = -w_1(L) = w_1(L) \in H^1(\mathbb{P}(E); \mathbb{Z}/2)$$

Leray-Hirsch より

$$x^r + w_1(E)x^{r-1} + \cdots + w_r(E) = 0$$

なる $w_i(E) \in H^i(X; \mathbb{Z}/2)$ が一意に存在

公理 (1) $E \cong F \Rightarrow w(E) = w(F)$

(2) [自然性] $w(f^*E) = f^*w(E)$

(3) [和公式] $w(E \oplus F) = w(E) \cup w(F)$

(4) E が line bdle のとき $w(E) = 1 + \underset{\sim\sim}{w_1(E)}$

上で定めたもの

・SW類も公理で一意に定まる。(証明も同様) 分裂原理も同様

例 S^n の接束 $TS^n \oplus \underline{\mathbb{R}} = \underline{\mathbb{R}^{n+1}}$

(∵ $S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ より $0 \to TS^n \to T\mathbb{R}^{n+1} \to N \to 0$

normal bdle $N \cong \underline{\mathbb{R}}$ より

$$w(TS^n)\, w(\underline{\mathbb{R}}) = w(\underline{\mathbb{R}^{n+1}}) \quad \therefore \quad w(TS^n) = 1$$

No.

Date

例 $\mathbb{RP}^n$の接束

$T\mathbb{RP}^n \cong \mathrm{Hom}(L, \mathbb{R}^{n+1}/L)$ （前と同様）

より前と同じ計算により $w(T\mathbb{RP}^n) = (1+x)^{n+1}$

$x \in H^1(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}/2)$ generator

$w(T\mathbb{RP}^n) = 1 \iff n+1$が2の巾

∵ $(a+b)^2 \equiv a^2+b^2 \mod 2$ を使う

$n+1 = 2^k \cdot q$ （q：奇数）のとき

$(1+x)^{1+n} = (1+x^{2^k})^q = 1+qx^{2^k}+\cdots$ より分かる.

系 $T\mathbb{RP}^n$が自明 $\Rightarrow$ $n+1$は2の巾

（$\mathbb{RP}^1 \cong S^1$, $\mathbb{RP}^3 \cong SO(3)$, $\mathbb{RP}^7$の接束は自明

実は$\mathbb{RP}^{15}$以降は非自明（Bott-Milnor, Kervaire））

問 $\mathbb{R}^n$が$\mathbb{R}$上双線形で零因子を持たない積 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

を持てば $T\mathbb{RP}^{n-1}$は自明であることを示せ

（積は結合的とも単位元を持つとも仮定しなくてよい） [Milnor-Stasheff] 参照

Prop (1) $E \to X$が向き付け可能 $\iff$ $w_1(E) = 0$

(2) $E \to X$が至る所消えない section を持つ $\Rightarrow$ $w_r(E) = 0$

$r = \mathrm{rank}\, E$

∵ (1) 分裂原理を使って

$w_1(E) = w_1(\Lambda^r E)$ が示せる

E : orientable $\iff$ $\Lambda^r E$: orientable $\iff$ $w_1(\Lambda^r E) = 0$

(2) また Θ を E の $\mathbb{Z}/2$ 係数の Thom 類とすれば 分裂原理から

$w_r(E) = s^* \Theta$ が示せる

Pontrjagin 類

$E \longrightarrow X$ rank r の実ベクトル束

$\rightsquigarrow$ $E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ は同じ rank の複素ベクトル束

定理 i : 奇数 $\Rightarrow$ $2\, c_i(E \otimes \mathbb{C}) = 0$

∵ E に実内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を入れるとき $\mathbb{C}$双線 な $\underbrace{\text{ペアリング}}_{\text{非退化}}$

$(E \otimes \mathbb{C})_x \times (E \otimes \mathbb{C})_x \longrightarrow \mathbb{C}$

が誘導される

$\therefore\ (E \otimes \mathbb{C})^* \cong E \otimes \mathbb{C}$

$c_i(E \otimes \mathbb{C}) \cong c_i((E \otimes \mathbb{C})^*) = (-1)^i c_i(E \otimes \mathbb{C})$

定義 $p_i(E) = (-1)^i c_{2i}(E \otimes \mathbb{C}) \in H^{4i}(X ; \mathbb{Z})$

$0 \leqq i \leqq \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor$ を Pontrjagin 類という

例) $E \to X$ $\mathbb{C}$ベクトル束 を 実ベクトル束とみなす.

$E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong E \oplus \overline{E}$ as $\mathbb{C}$-vector bdle

$\uparrow$

$\mathbb{C}$の作用により $\mathbb{C}$ベクトル束と思う

ここで $\overline{E}$ は 複素共役束

($\overline{E}$は実ベクトル束としては Eで, $\lambda \in \mathbb{C}$ の作用を $\bar{\lambda}$ で定めたもの)

エルミート計量を入れると $\overline{E} \cong E^*$ に注意

$\delta_1, \cdots, \delta_r$: Eの Chern roots とすると

$-\delta_1, \cdots, -\delta_r$ $\overline{E}$ の chern root

$$\Rightarrow \quad c(E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) = \prod(1+\delta_i) \prod(1-\delta_i)$$
$$= \prod_i (1-\delta_i^2)$$

よって $p(E) = \prod_i (1+\delta_i^2)$

Grassman多様体・分類空間

$G(k, n) = \{ V \subset \mathbb{C}^n \mid \dim V = k \}$

複素グラスマン多様体

$\mathcal{V} \to G(k, n)$ tautological bundle $(\mathrm{rank} = k)$

$\mathcal{V} = \{ (V, v) \in G(k, n) \times \mathbb{C}^n \mid v \in V \}$

$$0 \to \mathcal{V} \to \underline{\mathbb{C}}^n \longrightarrow Q \to 0 \quad \text{exact seq}$$

$$Q = \underline{\mathbb{C}}^n / \mathcal{V} \quad \text{universal quotient bdle}$$

$c_i = c_i(\mathcal{V}) \quad 1 \le i \le k$
$s_i = s_i(Q) \quad 1 \le i \le n-k$
とおく

$$1 = c(\underline{\mathbb{C}}^n) = (1 + c_1 + \cdots + c_k)(1 + s_1 + \cdots + s_{n-k})$$

$\rightsquigarrow$ nコのrelationが出る

__定理__ $$H^*(G(k,n);\mathbb{Z}) \cong \frac{\mathbb{Z}[c_1, \cdots, c_k, s_1, \cdots, s_{n-k}]}{\langle (1 + c_1 + \cdots + c_k)(1 + s_1 + \cdots + s_{n-k}) - 1 \rangle}$$
の斉次部分

__分類空間__ inclusionがあり

$$\mathbb{C}^n \subset \mathbb{C}^{n+1} \subset \mathbb{C}^{n+2} \subset \cdots$$

は $G(k,n) \subset G(k,n+1) \subset \cdots$ を誘導する

$$G(k,\infty) = \bigcup_{n \ge k} G(k,n) \leftarrow \mathcal{V} \quad \text{tautological bdle}$$

__定理__ X: パラコンパクト ハウスドルフ

rank k $\mathbb{C}$ベクトル束 $E \to X$ に対して $\exists f: X \to G(k,\infty)$

s.t $E \cong f^*\mathcal{V}$

(さらに f はホモトピーを除き一意)

$[X, G(k,\infty)]$ = X から $G(k,\infty)$ への連続写像のホモトピー類の集合

$\mathrm{Vect}_k(X)$ = X 上の rank k ベクトル束の同型類の集合

$$
\begin{array}{ccc}
[X, G(k,\infty)] & \cong & \mathrm{Vect}_k(X) \\
\Psi & & \Psi \\
f & \longmapsto & f^*\mathcal{V} = E
\end{array}
$$

f を E の分類写像という

注　$c_i(E) = c_i(f^*\mathcal{V}) = f^*(c_i(\mathcal{V})) = f^*c_i$

$H^*(G(k,\infty)) = \mathbb{Z}[c_1, \cdots, c_k]$　多項式環