No.

Date

ref. [Bott-Tu §20]

Chern類の公理

(1) $E \cong F \implies c_i(E) = c_i(F)$

(2) [自然性] $f : X \xrightarrow{\text{conti}} Y$ $\quad E \to Y$ ℂベクトル束

$$c_i(f^*E) = f^* c_i(E)$$

∵

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d] & E \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

の射影化をとり

$$\begin{tikzcd} f^*L \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[d] \\ \mathbb{P}(f^*E) \arrow[r, "\tilde{f}"'] \arrow[d] & \mathbb{P}(E) \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

f^*L は $\mathbb{P}(f^*E)$ 上の tautological と同一視される

$x = -c_1(L)$ とおくと $\quad f^*x = -c_1(f^*L)$

$$x^n + c_1(E)x^{n-1} + \cdots + c_n(E) = 0 \quad \text{in } H^*(\mathbb{P}(E))$$

を f で引き戻して

$$(f^*x)^n + (f^*c_1(E))\cdot(f^*x)^{n-1} + \cdots + f^*c_n(E) = 0$$

$$\therefore \quad f^*c_i(E) = c_i(f^*E)$$

(3) [和公式] $\quad c(E \oplus F) = c(E) \cup c(F)$

つまり $\quad c_k(E \oplus F) = \sum_{i+j=k} c_i(E) \cup c_j(F)$

(証明はあとで)

(4) Eが line bdl のとき $c(E) = 1 + e(E)$

定理 複素ベクトル束 $E \to X$ に対して コホモロジー類

$$c(E) = 1 + c_1(E) + \cdots + c_r(E) \in H^*(X;\mathbb{Z})$$

$$r = \mathrm{rank}\, E, \quad c_i(E) \in H^{2i}(X;\mathbb{Z})$$

を対応させる規則で (1)〜(4) を満たすものは一意

∵ $\tilde{c}$: (1)〜(4) を満たすとする

$E \to X$ $\mathbb{C}$ベクトル束

$\mathbb{P}(E) \xrightarrow[p]{} X$ 射影化

$\mathbb{P}(E)$ 上のベクトル束の完全列

$$0 \to L \hookrightarrow p^*E \longrightarrow Q := p^*E/L \to 0$$ を考える

注 $\ell \in \mathbb{P}(E_x)$ において

$$L_\ell = \ell, \quad (p^*E)_\ell = E_x, \quad Q_\ell = E_x/\ell$$

このとき $p^*E \cong L \oplus Q$ (X: paracpt, Hausdorff 仮定)

よって $p^*\tilde{c}(E) \underset{\text{自然性}}{=} \tilde{c}(p^*E) \underset{\text{和公式}}{=} \tilde{c}(L)\,\tilde{c}(Q)$

$\tilde{c}(L) \underset{(4)}{=} 1 + e(L) = 1 - x$ である

No.

Date

$\tilde{c}(Q) = 1 + y_1 + \cdots + y_{r-1}$, $p^* \tilde{c}(E) = 1 + \tilde{c}_1 + \cdots + \tilde{c}_r$ とおくと

$$(1-x)(1+y_1+\cdots+y_{r-1}) = 1+\tilde{c}_1+\cdots+\tilde{c}_r$$

$(1-x)^{-1} = 1+x+x^2+\cdots$ を両辺にかけて $(2r)$次を比較

$$0 = x^r + \tilde{c}_1 x^{r-1} + \cdots + \tilde{c}_r$$

$$\therefore \tilde{c}_i = c_i(E)$$

//

分裂原理

定理 $E \to X$ cpx vector bundle

$\exists$ 位相空間 F, $\exists$ conti map $f: F \to X$ s.t.

(1) f^*E は直線束の和に分解する

(2) $f^*: H^*(X) \to H^*(F)$ は単射

(:) $F = Fl(E)$

$$= \bigcup_{x \in X} \left\{ (V_1, \cdots, V_r) \;\middle|\; \begin{array}{l} 0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_r = E_x \\ \dim V_i = i \end{array} \right\}$$

↑

(full) flag という ($r = \mathrm{rank}\, E$)

E に付随する flag 束

fiber $Fl(E_x)$: flag variety

- tautological bdle $\mathcal{V}_i \to Fl(E)$

$$\mathcal{V}_i = \{((0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_r = E_x), v) \in Fl(E) \times E \mid v \in V_i\}$$
$$\downarrow$$
$$Fl(E)$$

- これらはベクトル束のflagをなす

$$\begin{tikzcd} 0 \subset \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{V}_r = f^*E \arrow[d] \\ Fl(E) \arrow[d, "f"] \\ X \end{tikzcd}$$

- f^*Eに計量を入れて $f^*E \cong \mathcal{V}_1 \oplus (\mathcal{V}_2/\mathcal{V}_1) \oplus \cdots \oplus (\mathcal{V}_r/\mathcal{V}_{r-1})$

line bdleの和になる

- あとは $f^*: H^*(X) \to H^*(F)$ が単射であることを示せばよい

$Fl(E)$は射影化のくりかえしで得られる

$$\begin{tikzcd} X & \mathbb{P}(E) \arrow[l, "p_1"'] & \mathbb{P}(Q_1) \arrow[l, "p_2"'] & \cdots \arrow[l] & \mathbb{P}(Q_{r-2}) \arrow[l, "p_{r-2}"'] & = Fl(E) \\ & Q_1 \arrow[u] & Q_2 \arrow[u] & & Q_{r-1} \arrow[u] & \text{rank } 1 \end{tikzcd}$$

V_1をえらぶ　V_2をえらぶ　V_{r-1}をえらぶ

$Q_1 = p_1^*E/L$, $Q_2 = p_2^*Q_1/L$

各p_i^*はLeray-Hirschより単射 //

和公式の証明　$c(E \oplus F) = c(E) \cup c(F)$

Step 1　$E = L_1 \oplus \cdots \oplus L_r$,　L_i: line bdle のとき

$c(E) = c(L_1)\,c(L_2) \cdots c(L_r)$ を示す.

∵

$$\begin{array}{ccc} L & \longrightarrow & \mathbb{P}(E) \\ & & \downarrow p \\ & & X \end{array} \qquad x = -c_1(L)$$

$l \in \mathbb{P}(E_y)$ に対し　$L_l = l \subset E_y = L_{1,y} \oplus \cdots \oplus L_{r,y}$

これは　$\mathrm{Hom}(L, p^*E) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Hom}(L, p^*L_i)$ の至る所消えない

section を与える.

$$\therefore\ 0 = e(\mathrm{Hom}(L, p^*E))$$

$$= \prod_{i=1}^{r} e(\mathrm{Hom}(L, p^*L_i)) \qquad \text{オイラー類の和公式}$$

$$= \prod_{i=1}^{r} e(L^* \otimes p^*L_i)$$

$$= \prod_{i=1}^{r} (x + p^*c_1(L_i)) \qquad x\text{の}r\text{次式}$$

定義により この式の x^{r-i} の係数が $p^*c_i(E)$

$$\Rightarrow\ c(E) = (1 + c_1(L_1)) \cdots (1 + c_n(L_r))$$

$$= c(L_1) \cdots c(L_r)$$

//

<u>Step 2</u> E_1, E_2 ベクトル束

前の定理を2回くりかえし使って E_1, E_2 が共に line bdle の和となる空間がとれる

$$\exists f: F \longrightarrow X \quad \begin{cases} f^* E_i = L_{i,1} \oplus \cdots \oplus L_{i,r_i} \\ f^*: H^*(X) \longrightarrow H^*(F) \text{ は injection} \end{cases}$$

$$f^* c(E_1 \oplus E_2) = c(f^* E_1 \oplus f^* E_2) \quad \text{自然性}$$

$$= c(L_{1,1} \oplus \cdots \oplus L_{1,r_1} \oplus L_{2,1} \oplus \cdots \oplus L_{2,r_2})$$

$$\underset{(\text{Step } 1)}{=} c(L_{1,1}) \cdots c(L_{1,r_1})\, c(L_{2,1}) \cdots c(L_{2,r_2})$$

$$\underset{(\text{Step } 1)}{=} c(f^* E_1)\, c(f^* E_2)$$

$$= f^* (c(E_1)\, c(E_2))$$

f^*:単射ゆえ $c(E_1 \oplus E_2) = c(E_1) \cup c(E_2)$ //

<u>命題</u> $r = \operatorname{rank} E$ のとき $c_r(E) = e(E)$

∵ E が分裂する空間に引き戻して示せばよい。

$$E = L_1 \oplus \cdots \oplus L_r \quad \text{とすると}$$

$$e(E) = e(L_1) \cdots e(L_r) \quad \text{オイラーの和公式}$$

$$c(E) = c(L_1) \cdots c(L_r) \quad \text{の最高次をみて}$$

$$c_r(E) = c_1(L_1) \cdots c_1(L_r)$$ //

No.

Date

分裂原理 (splitting principle)

Chern類の計算においては ベクトル束は直線束の直和に分裂していると仮定して計算してよい

(例) E, F: rank 2 ベクトル束

$c(E \otimes F)$ を $c_i(E)$, $c_j(F)$ を使って表せ

$E = E_1 \oplus E_2$, $F = F_1 \oplus F_2$ と仮定して計算

$c_1(E_i) = e_i$, $c_1(F_i) = f_i$ とおく

$$c(E \otimes F) = \prod_{i,j} c(E_i \otimes F_j) = \prod_{i,j} (1 + e_i + f_j)$$

これは e_1, e_2 の入れかえ, f_1, f_2 の入れかえ について対称

$$\rightsquigarrow \left.\begin{array}{ll} c_1(E) = e_1 + e_2 & c_1(F) = f_1 + f_2 \\ c_2(E) = e_1 e_2 & c_2(F) = f_1 f_2 \end{array}\right\} \text{基本対称式}$$

たちの多項式で書ける

(演習) これを実行せよ

Chern root　　$E = L_1 \oplus \cdots \oplus L_r$ と仮想的に分解したとき

$$c(E) = (1 + c_1(L_1)) \cdots (1 + c_1(L_r)) = (1 + \delta_1) \cdots (1 + \delta_r)$$

$\delta_i = c_1(L_i)$ を Chern root という.

(X のコホモロジー類ではなく ある別の空間 $\tilde{F}$ のコホモロジー類)

$\delta_1, \cdots, \delta_r$ の対称多項式 は $c_i(E)$ たちの多項式 で書ける

elementary symmetric poly

$$c_i(E) = \sum_{k_1<k_2<\cdots<k_i} \delta_{k_1}\cdots\delta_{k_i}$$

命題　E : rank r

(1) $c_1(E) = c_1(\wedge^r E)$ ← $\det E = \wedge^r E$ とも書く

(2) $c_i(E^*) = (-1)^i c_i(E)$

(:) $E = L_1 \oplus \cdots \oplus L_r$ と仮定してよい　$\delta_i = c_1(L_i)$

(1) $\wedge^r E = L_1 \otimes \cdots \otimes L_r$

$$c_1(E) = \delta_1 + \cdots + \delta_r = c_1(\wedge^r E)$$

(2) $E^* = L_1^* \oplus \cdots \oplus L_r^*$

$$c(E^*) = c(L_1^*) \cdots c(L_r^*)$$

$$= (1-\delta_1)\cdots(1-\delta_r)$$ より明らか //

(演習) E: rank n ベクトル束

$$c_1(\wedge^2 E) = (n-1)\, c_1(E)$$

$$c_2(\wedge^2 E) = \binom{n-1}{2} c_1(E)^2 + (n-2)\, c_2(E)$$ を示せ

No.

Date

例

$\mathbb{CP}^n$ の接束

$\mathbb{CP}^n$ は複素多様体 $\rightsquigarrow$ $T_x\mathbb{CP}^n$ は $\mathbb{C}$ベクトル空間

Prop $\ell \in \mathbb{CP}^n$ $(\ell \subset \mathbb{C}^{n+1})$

に対して $T_\ell \mathbb{CP}^n \cong \mathrm{Hom}(\ell, \mathbb{C}^{n+1}/\ell)$

∵ $\underbrace{\mathbb{C}^{n+1} \text{の Hermite 計量}}_{\text{標準}}$ により $\mathbb{C}^{n+1}/\ell \cong \ell^\perp$

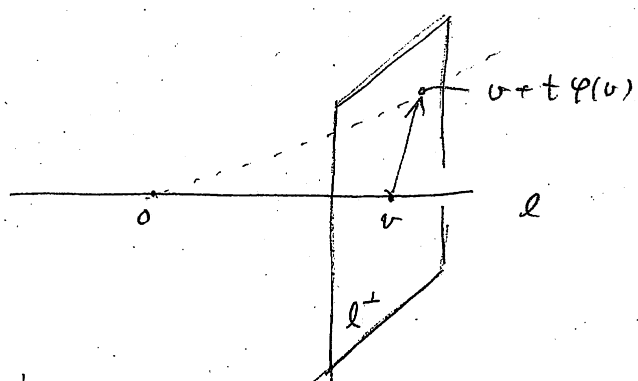
$\varphi \in \mathrm{Hom}(\ell, \mathbb{C}^{n+1}/\ell) = \mathrm{Hom}(\ell, \ell^\perp)$ に対して

ℓ を通る曲線 $c_\varphi(t) = \{ v + t\varphi(v) \mid v \in \ell \} \subset \mathbb{C}^{n+1}$

1-dim subspace

$$\varphi \longmapsto \left.\frac{d}{dt} c_\varphi(t)\right|_{t=0} \in T_\ell \mathbb{CP}^n$$

は同型になる.



$L \to \mathbb{CP}^n$ tautological line bdl

$0 \to L \to \underline{\mathbb{C}^{n+1}} \to Q \to 0$ $\underline{\mathbb{C}^{n+1}} = \mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$ 自明束

ℓ での fiber は $\mathbb{C}^{n+1}/\ell$ で与えられるベクトル束 $\longrightarrow$ $Q = \underline{\mathbb{C}^{n+1}}/L$

universal quotient bdl という

Prop p13 $\quad T\mathbb{CP}^n \cong \mathrm{Hom}(L, Q) = L^* \otimes Q$

よって完全列に L^* をテンソルして

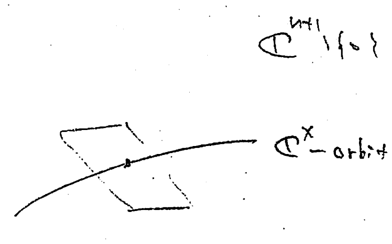
$$0 \to \underline{\mathbb{C}} \to (L^*)^{\oplus(n+1)} \longrightarrow \underset{\overset{\parallel}{T\mathbb{CP}^n}}{L^* \otimes Q} \to 0 \qquad (*)$$

$$\therefore \quad c(T\mathbb{CP}^n)\cdot c(\underline{\mathbb{C}}) = c(L^*)^{n+1}$$

$$c(T\mathbb{CP}^n) = (1+x)^{n+1} \qquad x := c_1(L^*) = -c_1(L)$$

$$c_i(T\mathbb{CP}^n) = \binom{n+1}{i} x^i$$

注 完全列 $(*)$ はこのようにも理解できる



$$\mathbb{CP}^n = (\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\})/\mathbb{C}^\times$$

$\pi : \mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\} \to \mathbb{CP}^n$ 射影

$$0 \to \underline{\mathbb{C}} \to T(\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}) \longrightarrow \pi^* T\mathbb{CP}^n \to 0$$

$\underline{\mathbb{C}}$ ↑ $\mathbb{C}^\times$-orbitの接空間

$T(\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}) = \underline{\mathbb{C}}^{\oplus(n+1)}$

$\mathbb{C}^\times$ で割ると $(*)$ になる

問 $T\mathbb{CP}^n$ が複素直線束を部分束として持てば n は奇数であることを示せ。 ($T\mathbb{CP}^n = L \oplus L^\perp$ としてChern類を比較)

(問 p: 素数に対して $T\mathbb{CP}^{p-1}$ は非自明な部分ベクトル束を持たないことを示せ)