No.

Date

$\mathbb{Z}$ 上の Euler 類

$E \to X$ oriented rank n 実ベクトル束

$\Theta \in H^n(E, E \setminus X)$ Thom 類

$s : X \to E$ section $e(E) := s^*\Theta \in H^n(X ; \mathbb{Z})$

Euler 類

注 oriented とは限らないとき $\mathbb{Z}/2$ 係数の Thom 類 $\Theta_{\mathbb{Z}/2}$ を引き戻したもの

$$w_n(E) = s^*\Theta_{\mathbb{Z}/2} \in H^n(X, \mathbb{Z}_2)$$

を n 次の Stiefel-Whitney 類 という

2ページ先の Thom 類・Euler 類の性質を先にする

$\mathbb{Z}$ 上の Poincaré duality（お話のみ、[Hatcher] または [Milnor-Stasheff] 参照）

M : コンパクト向き付けられた $\underbrace{\text{多様体}}_{m\text{次元}}$（$\mathbb{Z}/2$ 係数なら向き付けの仮定は不要）

$$\underset{\substack{\text{Poincaré}\\ \text{双対}}}{H^{m-p}(M) \longleftrightarrow} H^p(M) \underset{\text{双対}}{\longleftrightarrow} H_p(M) \quad \text{(体係数の場合)}$$

$\rightsquigarrow$ $H^{m-p}(M) \cong H_p(M)$ これは $\mathbb{Z}$ 上でも成立。

基本類 $\exists!\ [M] \in H_m(M ; \mathbb{Z})$

s.t. $[M]$ の $H_m(M, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_m(M, M \setminus \{x\} ; \mathbb{Z})$ ← local homology

$\underset{\text{切除同型}}{\cong} H_m(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{0\} ; \mathbb{Z})$

による像は向きの与える生成元に一致する（$\forall x \in M$）

M が単体分割されているとすると $M = \sum \pm (m\text{次元単体})$

No.
Date

・$\alpha \in H^m(M)$ に対して $\langle \alpha, [M] \rangle = \int_M \alpha_{dR}$

de Rham コホモロジーにおける「積分」に対応

<u>cap積</u>

$$H^p(M) \times H_{p+q}(M) \longrightarrow H_q(M)$$
$$(\alpha, \sigma) \longmapsto \alpha \frown \sigma$$

(co) chain レベルで，次のように定まる

$$\langle \omega, \alpha \frown \sigma \rangle = \langle \underbrace{\omega \smile \alpha}_{\text{cup積}}, \sigma \rangle$$

$\omega \in S^q$
$\alpha \in S^p$
$\sigma \in S_{p+q}$

$$\alpha \frown \sigma = \langle \alpha, \sigma \circ [q, \cdots, q+p] \rangle (\sigma \circ [0, \cdots, q])$$

<u>定理</u>

$$H^p(M) \xrightarrow{\cong} H_{m-p}(M)$$
$$\alpha \longmapsto \alpha \frown [M]$$

・<u>部分多様体のPD</u>

$S \subset M$ s次元 ori. submfd $[S] \in H_s(M)$ が定まる

$\exists ! \eta_S \in H^{m-s}(M)$ s.t. $[S] = \eta_S \frown [M]$

$\alpha \in H^s(M)$ とペアリングをとると

$$\langle \alpha, [S] \rangle = \langle \alpha, \eta_S \frown [M] \rangle = \langle \alpha \smile \eta_S, [M] \rangle$$

[de Rham での式 $\int_S \alpha = \int_M \alpha \wedge \eta_S$ に対応する]

No.

Date

Thom類との関係　　$S \subset M$　normal bundle　$N \overset{j}{\hookrightarrow} M$ 管状近傍

$$\begin{array}{ccccccc} H^0(S) & \overset{\text{Thom}}{\cong} & H^{m-k}(N, N\setminus S) & \underset{\substack{\text{excision}\\ \text{isom}\\ (\text{切除同型})}}{\cong} & H^{m-k}(M, M\setminus S) & \longrightarrow & H^{m-k}(M) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ 1 & \longmapsto & \Theta & & & & j^*\Theta \end{array}$$

の像は η_S に一致する。（[MS] §11, Prob 11-C）

オイラー類の局所化　　$E \to M$　oriented rank n 実ベクトル束

$s: M \to E$　section　　$\Theta \in H^n(E, E\setminus M)$　Thom類

$$\begin{array}{ccc} s^*\Theta & \in & H^n(M, M\setminus s^{-1}(0)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ e(E) & \in & H^n(M) \end{array}$$

← 「$s^{-1}(0)$に局在したオイラー類」

sが横断的 $\Rightarrow$ $s^*\Theta$ は Zの $\overbrace{\text{normal bundle}}^{N}$ のThom類

in $H^n(N, N\setminus Z) \underset{\text{excision}}{\cong} H^n(M, M\setminus Z)$

$\Rightarrow$ $e(E) = \eta_Z$ がいえる。

$\boxed{\text{ここを先に説明}}$

Thom類の性質　　$\Theta_E \in H^*(E, E\setminus X)$（または $H^*_{cv}(E)$）　Thom類

（同型）$\varphi: E \cong F$　as oriented vector bdle $\Rightarrow$ $\Theta_E = \varphi^*\Theta_F$

(自然性) $f: X \to Y$ 　 $E \to Y$ ori. v.b.

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d] & E \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

$$\tilde{f}^* \Theta_E = \Theta_{f^*E}$$

(各fiberに制限すると明らか)

(和) $\Theta_{E\oplus F} = p_1^* \Theta_E \cup p_2^* \Theta_F$

$$\begin{tikzcd} & E\oplus F \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ E \arrow[dr] & & F \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

☺

$$H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times H^m(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus 0)$$

$$\xrightarrow{\cong} H^{n+m}(\mathbb{R}^{n+m}, \mathbb{R}^{n+m} \setminus \{0\})$$

$$(\alpha, \beta) \longmapsto \alpha \times \beta := p_1^* \alpha \cup p_2^* \beta$$

(向き) $\overline{E}$: Eの向きを反対にしたベクトル束

$$\Longrightarrow \Theta_{\overline{E}} = -\Theta_E$$

<u>Euler類の性質</u>

(同型) $E \cong F \Longrightarrow e(E) = e(F)$

(自然) $f: X \to Y$, $\underset{\text{ベクトル束}}{E \to Y} \Longrightarrow e(f^*E) = f^* e(E)$

(和) $e(E \oplus F) = e(E) \cup e(F)$

(向き) $e(\overline{E}) = -e(E)$

(section) $s: X \to E$ 至る所消えない section $\Longrightarrow e(E) = 0$

☺ $s^*\Theta \in H^*(M, M) = 0$ となるから

No.

Date

Prop rank(E) が奇数 $\Rightarrow$ $2\,e(E) = 0$

(特に $\mathbb{R}$ 係数なら $e(E)=0$)

∵

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\cong} & \bar{E} \\ v & \longmapsto & -v \end{array}$$

は向きを保つ同型

$$\therefore \quad e(E) = e(\bar{E}) = -e(E)$$

//

Euler数 X: 位相空間 k: 体 [Bott-Tu] §11

$\bigoplus_{p\geq 0} H_p(X;\mathbb{Z})$ が有限生成アーベル群と仮定

$$\chi(X) = \sum_p (-1)^p \dim_k H^p(X;k)$$

をオイラー数という (オイラー標数)

問 この定義は well-def で体 k のとり方によらないことを示せ (普遍係数定理) ($\dim_k H^p(X,k)$ は k による)

定理 M: コンパクト向きづけられた多様体のとき (以下 de Rham で考える)

$$\chi(M) = \int_M e(TM)$$

注 M の向きを反対にすると $e(TM)$, M の向きが共に (-1) 倍.

左辺は向きによらない.

Lem 1 $\Delta \subset M\times M$ $\quad \Delta = \{(x,x)\in M\times M \mid x\in M\}$

対角集合

$$\eta_\Delta = \sum_i (-1)^{|\alpha_i|} \alpha_i \otimes \beta_i \in H^*(M) \otimes H^*(M) \cong H^*(M \times M)$$

但し $\{\alpha_i\}, \{\beta_i\} \subset H^*(X)$ は 互いに dual basis

$$\int_M \alpha_i \wedge \beta_j = \delta_{ij}$$

$|\alpha_i|$ は α_i の degree

∵ $\omega, \tau \in H^*(M)$ に対して $\omega = \sum \omega_i \beta_i$, $\tau = \sum \tau_i \alpha_i$ とおく

$$\int_\Delta \omega \otimes \tau = \int_M \omega \wedge \tau = \sum \int_M \omega_i \tau_j \, \beta_i \wedge \alpha_j$$

$$= \sum_i \omega_i \tau_i (-1)^{|\alpha_i| \cdot |\beta_i|}$$

一方 $$\int_{M \times M} (\omega \otimes \tau) \wedge \left(\sum_i (-1)^{|\alpha_i|} \alpha_i \otimes \beta_i \right)$$

$$= \sum_{i,j,k} \int_{M \times M} \omega_j \tau_k (-1)^{|\alpha_i|} (\beta_j \otimes \alpha_k) \wedge (\alpha_i \otimes \beta_i)$$

$$= \sum_{i,j,k} \omega_j \tau_k (-1)^{|\alpha_i| + |\alpha_i||\alpha_k|} \underbrace{\int_M \beta_j \wedge \alpha_i}_{(-1)^{|\alpha_i||\beta_j|} \delta_{ij}} \cdot \underbrace{\int_M \alpha_k \wedge \beta_i}_{\delta_{ki}}$$

$$= \sum_i \omega_i \tau_i (-1)^{|\alpha_i| \cdot |\beta_i|}$$

//

Lem2 $\quad N_{\Delta/M\times M} \cong TM$

∵ $\quad M \xrightarrow{\Delta} M\times M \qquad x \longmapsto (x,x)$

$$0 \to T_xM \xrightarrow{d\Delta} T_{(x,x)}(M\times M) \longrightarrow T_xM \to 0$$

$$v \longmapsto (v,v)$$

$$(v,w) \longmapsto v-w$$

は完全 ゆえ

Lem3 $\quad S \subset M \quad$ ori. submfd

$$\eta_S\big|_S = e(N_{S/M})$$

∵ $\quad \Theta$ を 管状近傍 $N \subset M$ の Thom 類 とするとき

$$\eta_S\big|_S = j_*\Theta\Big|_S = e(N_{S/M})$$

(定理の証)

$$\int_M e(TM) \underset{\text{Lem2}}{=} \int_\Delta e(N_{\Delta/M\times M})$$

$$\underset{\text{Lem3}}{=} \int_\Delta \eta_\Delta\Big|_\Delta$$

$$\underset{\text{Lem1}}{=} \int_\Delta \sum (-1)^{|\alpha_i|} \alpha_i \otimes \beta_i$$

$$= \int_M \sum (-1)^{|\alpha_i|} \alpha_i \wedge \beta_i = \sum (-1)^{|\alpha_i|} = \chi(M)$$

//

$\underline{\text{系}}$ (Poincaré-Hopf)　M: コンパクト多様体　(向き付け不要)

V : M上のベクトル場で零点は全て孤立している

$$\Rightarrow \quad \chi(M) = \sum_{x : V_x = 0} \mathrm{mult}_x(V)$$

☺ Mが向き付けられているときは右辺は $\int_M e(TM)$ に等しい。

・Mが向き付けられていないとき

$\mathrm{mult}_x(V)$ は well-defined (局所的に向きを与えればよい) ← [fiberの向きとbaseの向きが連動するから]

$\tilde{M} \to M$: orientation cover (2:1の被覆)

$$\tilde{M} = S(\wedge^m T^*M) \text{ は向きをもつ}$$

$\tilde{M}$ 上の対応するベクトル場 $\tilde{V}$ に対して公式をつかう

$$\chi(\tilde{M}) = 2\chi(M)$$

(問) Leray spectral seq を用いて F を fiber とする fiber束 $E \to X$ に対して

$$\chi(E) = \chi(F) \cdot \chi(X) \text{ を示せ}$$

[X: 任意の位相空間でOK]

$\underline{\text{Chern 類}}$　$E \to X$ 複素ベクトル束 $\mathrm{rank}(E) = r$

[Bott-Tu] §20

に対して $c_i(E) \in H^{2i}(X; \mathbb{Z})$ を対応させる $(1 \leq i \leq r)$

$$c_0(E) := 1$$

$$c(E) = c_0(E) + c_1(E) + \cdots + c_r(E) \in H^*(E)$$

total Chern 類

No.

Date

E が complex line bdl のとき　　$c_1(E) := e(E)$　とおく.

(X: 任意の位相空間でよいが, 今まで通り X は good open cover を持つ パラコンパクト・ハウスドルフ空間と仮定する
弱ホモトピー同値でとりかえて, この場合に帰着できる)

(㊟ 一般には　$e(E) = c_r(E) = c_{top}(E)$
top Chern class)

<u>recall</u>　line bundle L_1, L_2 に対して

$$c_1(L_1 \otimes L_2) = c_1(L_1) + c_1(L_2)$$

$$c_1(L^*) = -c_1(L) \quad \left(\because \ L^* \otimes L = Hom(L, L) = \underline{\mathbb{C}} \text{ は自明} \right)$$

Grothendieck の定義

$$\mathbb{P}(E) = \bigcup_{x \in X} \mathbb{P}(E_x) \qquad \text{ベクトル束の射影化}$$

$$= \bigcup_{x \in X} \{ l \subset E_x \mid \dim_{\mathbb{C}} l = 1 \}$$

$L \to \mathbb{P}(E)$　tautological line bdl

$$\begin{array}{ccl} L & = & \{ (l, v) \in \mathbb{P}(E) \times E \mid l \subset E_x, \ v \in E_x \ (\exists x) \} \\ \downarrow & & \ni (l,v) \\ & & \quad \ \, \downarrow \\ \mathbb{P}(E) & & \ni l \end{array}$$

各 fiber 上の tautological line bdl の和 と思える

$$x := -c_1(L) = -e(L) \in H^2(\mathbb{P}(E))$$

<u>Claim</u> $\forall y \in X$ に対して $\{1, x, \cdots, x^{r-1}\}$ は fiber $\mathbb{P}(E_y)$

に制限すると $H^*(\mathbb{P}(E_y))$ の $\mathbb{Z}$-basis をなす

$\because$ $L|_{\mathbb{P}(E_y)}$ は $\mathbb{P}(E_y) = \mathbb{C}P^{r-1}$ の tautological line bdl

$x|_{\mathbb{P}(E_y)} = -c_1(L|_{\mathbb{P}(E_y)})$ から 明らか

Leray-Hirsch の定理

$$\Longrightarrow \quad H^*(\mathbb{P}(E)) \cong \bigoplus_{i=0}^{r-1} H^*(X)\, x^i$$

$$-x^r = c_1(E)\, x^{r-1} + c_2(E)\, x^{r-2} + \cdots + c_r(E)$$

を満たす $c_i(E) \in H^{2i}(X)$ が唯1つ存在する。

$c_i(E)$ の定義

㊟ $E =$ line bdl のとき $\mathbb{P}(E) = X$

tautological line bdl は E 自身

$\Rightarrow x = -c_1(E)$ となって 上の定義と合致

No.

Date

Chern類の公理.

(1) $E \cong F \implies c_i(E) = c_i(F)$

(2) [自然性] $f: X \xrightarrow{\text{conti}} Y \quad E \to Y$ のベクトル束

$$c_i(f^*E) = f^* c_i(E)$$

∵

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d] & E \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

の射影化をとり

$$\begin{tikzcd} f^*L \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[d] \\ \mathbb{P}(f^*E) \arrow[r, "\tilde{f}"'] \arrow[d] & \mathbb{P}(E) \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

f^*L は $\mathbb{P}(f^*E)$ 上の tautological と同一視される

$x = -c_1(L)$ とおくと $\quad f^*x = -c_1(f^*L)$

$$x^n + c_1(E)x^{n-1} + \cdots + c_n(E) = 0 \quad \text{in } H^*(\mathbb{P}(E))$$

を f で引き戻して

$$(f^*x)^n + (f^*c_1(E)) \cdot (f^*x)^{n-1} + \cdots + f^*c_n(E) = 0$$

$$\therefore \quad f^*c_i(E) = c_i(f^*E)$$

(3) [和公式] $c(E \oplus F) = c(E) \cup c(F)$

つまり $c_k(E \oplus F) = \sum_{i+j=k} c_i(E) \cup c_j(F)$

(証明はあとで)

(4) Eが line bdl のとき $c(E) = 1 + e(E)$

定理 複素ベクトル束 $E \to X$ に対して コホモロジー類

$$c(E) = 1 + c_1(E) + \cdots + c_r(E) \in H^*(X;\mathbb{Z})$$

$$r = \operatorname{rank} E, \quad c_i(E) \in H^{2i}(X;\mathbb{Z})$$

を対応させる規則で (1)〜(4) を満たすものは一意

㊟ $\tilde{c}$; (1)〜(4) を満たすとする

$E \to X$ $\mathbb{C}$ベクトル束

$\mathbb{P}(E) \xrightarrow[p]{} X$ 射影化

$\mathbb{P}(E)$ 上のベクトル束の完全列

$$0 \to L \hookrightarrow p^*E \longrightarrow Q := p^*E/L \to 0$$ を考える

㊟ $\ell \in \mathbb{P}(E_x)$ において

$$L_\ell = \ell, \quad (p^*E)_\ell = E_x, \quad Q_\ell = E_x/\ell$$

このとき $p^*E \cong L \oplus Q$ (X: paracpt, Hausdorff 仮定)

よって $p^* \tilde{c}(E) \underset{\text{自然性}}{=} \tilde{c}(p^*E) \underset{\text{和公式}}{=} \tilde{c}(L)\, \tilde{c}(Q)$

$$\tilde{c}(L) \underset{(4)}{=} 1 + e(L) = 1 - x \quad \text{である}$$

No.

Date

$\tilde{c}(Q) = 1 + y_1 + \cdots + y_{r-1}$ $\quad p^*\hat{c}(E) = 1 + \tilde{c}_1 + \cdots + \tilde{c}_r$ とおくと

$$(1-x)(1+y_1+\cdots+y_{r-1}) = 1+\tilde{c}_1+\cdots+\tilde{c}_r$$

$(1-x)^{-1} = 1+x+x^2+\cdots$ を両辺にかけて $(2r)$次を比較

$$0 = x^r + \tilde{c}_1 x^{r-1} + \cdots + \tilde{c}_r$$

$$\therefore \quad \tilde{c}_i = c_i(E)$$

//

分裂原理

定理 $E \to X$ cpx vector bundle

$\exists$ 位相空間 F, $\exists$ conti map $f: F \to X$ s.t.

(1) f^*E は直線束の和に分解する

(2) $f^*: H^*(X) \to H^*(F)$ は単射

$\because$ $F = Fl(E)$

$$= \bigcup_{x \in X} \left\{ (V_1, \cdots, V_r) \;\middle|\; \begin{array}{l} 0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_r = E_x \\ \dim V_i = i \end{array} \right\}$$

↑

(full) flag という $\quad (r = \mathrm{rank}\, E)$

Eに付随する flag 束