No.

Date

$[[\tau]] \longmapsto [[\omega\cdot\tau]]$ なる作用

$[[\tau]] = \{ n_{\alpha_0\cdots\alpha_p}\,\theta_{\alpha_0\cdots\alpha_p} \}$ $\qquad \theta_{\alpha_0\cdots\alpha_p} \in H^n(E|_{U_{\alpha_0\cdots\alpha_p}}, E|_{U_{\alpha_0\cdots\alpha_p}} \setminus X)$

orientation class

- $\omega\cdot\tau$ は Čech cohomology の

cup 積 $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) \times \check{H}^{p'}(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) \longrightarrow \check{H}^{p+p'}(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$

に対応することは明らか

(Čech coh $\check{H}(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$ の cup 積も上と同様に定義される

これが singular coh の cup 積と同一視されることは $K_X^{p,q}$ に積を導入することにより同様に示せる。)

(注) X が finite good cover を持つときは good cover の数に関する帰納法で示せる。

上の議論は finite とは限らない場合にその議論を拡張したものとみなせる。(「generalized Mayer-Vietoris」: よこ方向の exactness)

"spectral sequence" の特別な場合を与えている

(注) $H^*(E, E\setminus X) \cong H^*(D(E), S(E)) \cong \tilde{H}^*(T(E))$

$T(E) := D(E)/S(E)$

Thom space という

より道: スペクトル系列 (Leray, Serre)

$\pi : E \longrightarrow X$ fiber 束 (fiber を F とする)

2021/6/22

10回目

$\mathcal{U}$: good open cover of X

$$K^{p,q} = \check{C}^p(\mathcal{U}, S^q(\pi^{-1}(\cdot))) = \prod_{\alpha_0<\cdots<\alpha_p} S^q(\pi^{-1} U_{\alpha_0\cdots\alpha_p})$$

double complex.

No.

Date

・よこ方向のコホモロジー ： $p=0$ のみのこる

$$0\to S^q_{\mathcal{U}}(E)\to K^{0,q}\to K^{1,q}\to\cdots \qquad \text{exact}$$

$$H_d^{*}H_\delta^{0}(K)\cong H_D^{*}(K)$$

・たて方向のコホモロジー $\qquad \pi^{-1}U_{\alpha_0\cdots\alpha_p}\cong U_{\alpha_0\cdots\alpha_p}\times F\underset{h.e.}{\sim}F$

より

$$H_d^q(K^{p,*})=\check{C}^p(\mathcal{U},\mathcal{H}^q)$$

$\mathcal{H}^q$ は local system 局所系 $\{H^q(E_x)\}_{x\in X}$

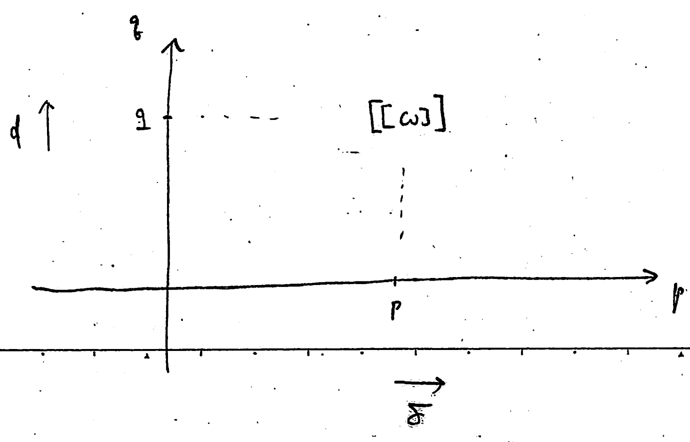
$$\rightsquigarrow\quad H_\delta^p H_d^q(K)\cong\check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{H}^q)$$

[一般には $H_D^{*}(K)$ とは一致しない]

注 もし局所系が自明にされるなら（たとえば X が単連結）

$$\check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{H}^q)=\check{H}^p(\mathcal{U},H^q(F))$$

$H_D^{*}(K)$ と $H_\delta^p H_d^q$ の差？



$[[\omega]]\in H_\delta^p H_d^q(K)$

$[\omega]\in\check{C}^p(\mathcal{U},H^q(F))$

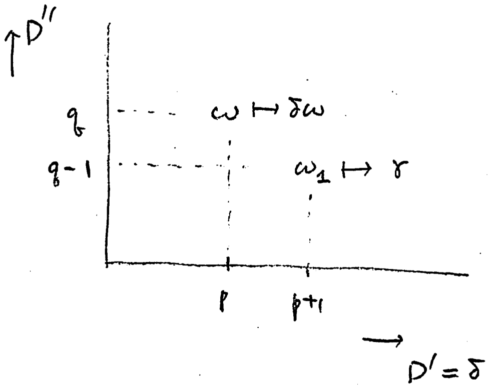
$\omega\in\check{C}^p(\mathcal{U},S^q(\pi^{-1}(\cdot)))$

「ω を D-cocycle に伸ばしたい」

$d\omega = 0$ $\left[\ d = \pm D'',\quad \delta = D'\ \text{をおもいだす}\ \right]$

$\delta[\omega] = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \delta\omega = -D''\omega_1$

なる $\omega_1 \in K^{p+1,\,q-1}$ が存在



$$D(\omega + \omega_1) = D''\omega + (D'\omega + D''\omega_1) + D'\omega_1$$

$$= \underbrace{\pm d\omega}_{0} + \underbrace{(\delta\omega + D''\omega_1)}_{0} + D'\omega_1$$

$$\in K^{p+2,\,q-1}$$

$\gamma = D(\omega+\omega_1) = D'\omega_1$ とおくとき

$$D''\gamma = D''(D'\omega_1) = -D'D''\omega_1 = +D'(\delta\omega) = (D')^2\omega = 0$$

つまり γ は d-closed （すでに δ-closed でもある）

・γ は d-exact とは一般に言えないが 次の map が定まる

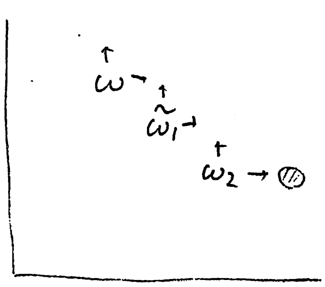
$$H^p_\delta H^q_d \xrightarrow{d_2} H^{p+2}_\delta H^{q-1}_d$$

$$[[\omega]] \longmapsto [[\gamma]] \qquad \gamma = D(\omega+\omega_1)$$

いろいろな choice によらず well-defined であることが分かる.

・もし $[[\gamma]] = 0$ なら さらに伸ばせる $\quad [\gamma] = \delta[\varepsilon] \quad d\varepsilon = 0$

$\gamma = \delta\varepsilon - D''\omega_2$ と書ける



ここで $\tilde{\omega}_1 = \omega_1 - \varepsilon$ とおけば

$$D(\omega + \tilde{\omega}_1 + \omega_2) = \underbrace{D''\omega}_{0} + \underbrace{(D'\omega + D''\tilde{\omega}_1)}_{D'\omega + D''\omega_1 \,=\, 0} + \underbrace{(D'\tilde{\omega}_1 + D''\omega_2)}_{D'\omega_1 - \delta\varepsilon + D''\omega_2 \,=\, 0} + D'\omega_2$$

No.

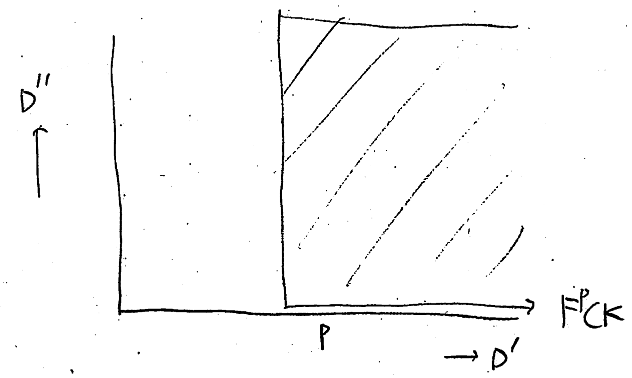
Date

ゆえ $D(\omega+\tilde{\omega}_1+\omega_2) = D'\omega_2 \in K^{p+3,\, q-2}$ となる //

Leray の定理

total complex $K = \bigoplus_{p,q} K^{p,q}$ の filtration を ここで定める

$$F^p(K) = \bigoplus_{\substack{p' \geq p \\ q}} K^{p',q}$$



grading は $p+q$ で入れる。

$$F^p K^n = \bigoplus_{\substack{p' \geq p \\ p'+q = n}} K^{p',q}$$

(F^pK は微分 D で閉じている)

associated graded quotient

$F^pK / F^{p+1}K$ に誘導される微分 は D''

- $E_0^{p,q} := F^p K^{p+q} / F^{p+1} K^{p+q} \cong K^{p,q}$ (第0ページ)

$d_0 = D''$ associated graded に入る微分

$d_0 : E_0^{p,q} \longrightarrow E_0^{p,q+1}$

- $E_1^{p,q} = E_0$ の d_0 についてのコホモロジー $= H_d^q(K^{p,*})$ (第1ページ)

ここには $D' = \delta$ が 微分

$d_1 : E_1^{p,q} \longrightarrow E_1^{p+1,q}$ を誘導する

- $E_2^{p,q} = E_1$ の d_1 に関するコホモロジー $= H_\delta^p H_d^q(K)$

(第2ページ)

上に述べた方法により

$$d_2 : E_2^{p,q} \longrightarrow E_2^{p+2,q-1}$$ が誘導され

$d_2 \circ d_2 = 0$ をみたす

<u>定理</u> (Leray)

$r \geqq 2$ に対して 群 $E_r^{p,q}$ と 微分 $d_r : E_r^{p,q} \longrightarrow E_r^{p+r,\,q-r+1}$

が定まり, 次をみたす (1) $E_2^{p,q} = \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{H}^q)$ $\left(= H^p(X, H^q(F)) \text{ if } \mathcal{H}^q \text{ is trivial}\right)$

(2) $E_{r+1}^{p,q}$ は $(E_r^{p,q}, d_r)$ のコホモロジーとして定まる.

(3) subcomplex $F^pK \subset K$ はコホモロジーの間の map

$H_D^n(F^pK) \longrightarrow H_D^n(K) \cong H^n(E)$ を定める. この像を $F^pH^n(E)$

と書くことにする.

$r \gg 1$ に対して $d_r : E_r^{p,q} \longrightarrow E_r^{p+r,\,q-r+1}$ は 0 になる

$(q-r+1 < 0$ となるから$)$. このとき $E_\infty^{p,q} := E_r^{p,q}$ とおく。

$$\underbrace{F^p H^{p+q}(E) \big/ F^{p+1} H^{p+q}(E)}_{=:\ Gr_F^p H^{p+q}(E)} \cong E_\infty^{p,q}$$ が成立する

(この事実を $(E_r^{p,q}, d_r)$ は $H_D^*(K) = H^*(E)$ に収束すると…

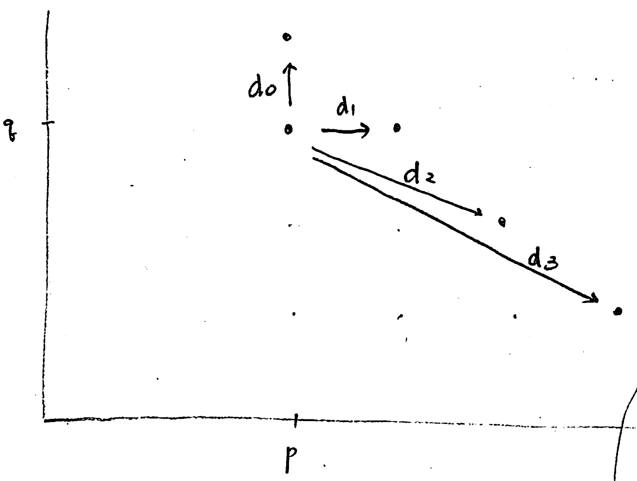
$$E_r^{p,q} \Longrightarrow H^{p+q}(E)$$ と表す)

(注) $E_\infty^{p,q}$ は $H^{p+q}(E)$ に入る filtration に関する associated graded module

$$Gr_F^p H^{p+q}(E) \cong E_\infty^{p,q}$$

[一般には $H^n(E) \not\cong \bigoplus_{p+q=n} E_\infty^{p,q}$ に注意. 体係数なら成立]

微分の方向の図



各 d_r は total degree "$p+q$" を1つ上げていることに注意

$\omega \in K^{p,q}$ に対して

$d_0\omega = d_1\omega = \cdots = d_r\omega = 0$

$\Longleftrightarrow$ ω は $\omega + \omega_1 + \cdots + \omega_r$ に伸ばせる

s.t. $D(\omega + \omega_1 + \cdots + \omega_r) \in K^{p+r+1,\, q-r}$

- 証明は難しくないが、面倒（代数をがんばる）

Gysin sequence　Thom同型 と relative coh exact seq を組み合わせる

$$\begin{tikzcd}
\to H^{n+p-1}(E\setminus X) \arrow[r, "\delta"] & H^{n+p}(E, E\setminus X) \arrow[r] & H^{n+p}(E) \arrow[r] \arrow[d, "s_0^*"] & H^{n+p}(E\setminus X) \to \cdots \\
H^{n+p-1}(S(E)) \arrow[u, phantom, "\cong" rotate=90] & H^p(X) \arrow[u, phantom, "\cong"] \arrow[r] & H^{n+p}(X) \arrow[u, phantom, "\cong"] & H^{n+p}(S(E)) \arrow[u, phantom, "\cong"]
\end{tikzcd}$$

但し $S(E)$ は sphere bundle

ここの map は $\alpha \longmapsto \pi^*\alpha \cup \Theta \longmapsto s_0^*(\pi^*\alpha \cup \Theta) = \alpha \cup e(E)$

定理 (Gysin)　$E \to X$ oriented rank n
（向き付けられないときは $\mathbb{Z}/2$ 係数で成立）

$$\to H^{n+p-1}(S(E)) \to H^p(X) \xrightarrow[\cup e(E)]{} H^{n+p}(X) \xrightarrow{\pi^*} H^{n+p}(S(E)) \to$$

は exact.

これは一般の oriented sphere bundle でも成立

[spectral seq を使って証明]
(n≧2 のとき)

$S \to X$ oriented sphere bundle
(fiber $\cong S^{n-1}$)

$$E_2^{p,q} = H^p(X, H^q(S^{n-1}))$$

oriented なので局所系 $\mathcal{H}^q$ は自明

E_2 ページ

$$\begin{array}{c|cccc}
n-1 & H^0(X) & H^1(X) & \cdots \\
 & & & \\
0 & H^0(X) & H^1(X) & \cdots \\
\hline
\end{array}$$

$d_2 = d_3 = \cdots = d_{n-1} = 0$ は次数から分かる　$E_2^{p,q} = E_3^{p,q} = \cdots = E_n^{p,q}$

d_n

$$\begin{array}{c|ccc}
(n-1) & H^0(X) & H^p(X) & H^{p+1}(X) \\
0 & H^0(X) & H^n(X) & H^{n+p}(X) \\
\hline
 & 0 & n &
\end{array}$$

$H^0(X) \xrightarrow{d_n} H^n(X)$, $H^p(X) \xrightarrow{d_n} H^{n+p}(X)$

degree n

d_{n+1} 以降は微分は消える

$\Rightarrow E_\infty \cong E_{n+1}$

Leray の定理

$$\Rightarrow \left(H^p(X) \xrightarrow{d_n} \underset{E_2^{n+p,0}}{\underset{\parallel}{H^{n+p}(X)}}\right) \to H^{n+p}(S) \to \left(\underset{E_2^{n-1,p+1}}{\underset{\parallel}{H^{p+1}(X)}} \xrightarrow{d_n} H^{p+n+1}(X)\right)$$

は exact

これは正に Gysin sequence

No.

Date

射影空間のコホモロジー環

$\pi : S^{2n+1} \hookrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{CP}^n$ Hopf fibration

$-x$ をこの S^1 束の Euler 類とする $-x = e(S^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n) = e(\text{tautological line bdle})$

定理 $H^*(\mathbb{CP}^n ; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[x]/(x^{n+1})$

(証)

$$H^{p+1}(S^{2n+1}) \to H^p(\mathbb{CP}^n) \xrightarrow{x} H^{p+2}(\mathbb{CP}^n) \to H^{p+2}(S^{2n+1})$$

Gysin sequence より $p \geq 0,\ p \neq 2n,\ p \neq 2n-1$ のとき

$$H^p(\mathbb{CP}^n) \xrightarrow[\cong]{\times x} H^{p+2}(\mathbb{CP}^n)$$

$p=-1$ のときより $H^1(\mathbb{CP}^n) = 0$

- $H^{2k}(\mathbb{CP}^n) \cong x^k H^0(\mathbb{CP}^n) = \mathbb{Z} x^k \quad 0 \leq k \leq n$
- $H^{\text{odd}}(\mathbb{CP}^n) = 0$ for $1 \leq \text{odd} \leq 2n-1$
- $k > 2n$ のときは $H^k(\mathbb{CP}^n) = 0$

//

Leray-Hirsch の定理 (係数環 R は任意)

$E \to X$ F を fiber とする fiber 束

$c_1, \cdots, c_N \in H^*(E)$ s.t. $\forall x \in X$ に対して

$c_1|_{E_x}, \cdots, c_N|_{E_x} \in H^*(E_x)$ は $H^*(E_x) = H^*(F)$ の R 上の basis

$$\Rightarrow H^*(E) = \bigoplus_{i=1}^{N} H^*(X) c_i$$

c_i は $H^*(E)$ の $H^*(X)$-module としての自由基底

(注) 特に自明束の場合, $H^*(F)$ が 有限生成 自由 R加群

$$\Rightarrow \quad H^*(X \times F) \cong H^*(X) \otimes_R H^*(F) \qquad \text{Künneth の定理}$$

(∵) $$K^{p,q} = \check{C}^p(\mathcal{U}, S^q(\pi^{-1}(\cdot)))$$

$c_i = [\sigma_i] \qquad \sigma_i \in S^*(E)$ cocycle をとる

subcomplex $L \subset K^{\cdot} = \bigoplus_{p,q} K^{p,q}$ を ここで定める

$$L = \{ \sigma_i \cdot \omega \mid 1 \leq i \leq N,\ \omega \in \check{C}^*(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) \}$$

の生成する R加群

ここで
$$\sigma_i \cdot \omega := \{ \sigma_i|_{U_{\alpha_0 \cdots \alpha_p}} \cdot \omega_{\alpha_0 \cdots \alpha_p} \} \in K$$

- L は D でとじている ($D'' = \pm\partial$ は自明, δ のみのこる)
- filtration $F^pL = L \cap F^pK$

inclusion $L \hookrightarrow K$ は E_1 項に同型を導く

$$H_D^*(F^pL/F^{p+1}L) \cong \bigoplus_{i=1}^{N} \sigma_i \check{C}^p(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) \cong H_D^*(F^pK/F^{p+1}K)$$

$\Rightarrow$ E_∞ に同型を導く

(実は L で考えると $E_\infty = E_2 \cong \bigoplus_{i=1}^{N} \sigma_i H^*(X)$ となる)

$\Rightarrow$ $H_D(L) \longrightarrow H_D(K)$ は F についての associated graded をとると同型を導く

$\Rightarrow$ $H_D(L) \cong H_D(K)$ で これは $\bigoplus_{i=1}^{N} H^*(X)\, c_i$ に等しい. //

No.

Date

(問)

上と同様にして 実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ の $\mathbb{Z}/2$ 係数コホモロジー環が $\mathbb{Z}_2[x]/(x^{n+1})$ であることを示せ　（Gysin seq を使う）

(問) 主 S^1 束 $E \to X$ の Leray spectral sequence の E_2 項を考える

$$E_2^{0,1} \cong \check{H}^0(\mathcal{U}, H^1(S^1)) \cong H^1(S^1)$$

の生成元 $\{\sigma_\alpha\}$ の $d_2 : E_2^{0,1} \longrightarrow E_2^{2,0} = \check{H}^2(\mathcal{U}, H^0(S^1)) = H^2(X, \mathbb{Z})$

による像は $-e(E)$（オイラー類のマイナス）であることを示せ.

(解) $\{\sigma_\alpha\} \in \check{H}^0(\mathcal{U}, H^1(S^1))$　　$\sigma_\alpha \in S^1(\pi^{-1}U_\alpha)$　　$(\pi : E \to X)$

は $H^1(S^1)$ の生成元を与える class

- σ_α として 次の cocycle をとる

$\pi^{-1}U_\alpha \cong U_\alpha \times S^1$　自明化　θ_α を S^1 の角度座標

$\theta_\alpha \longmapsto e^{i\theta_\alpha}$ とする

1-simplex $\tau : [0,1] \to \pi^{-1}U_\alpha$ に対して τ の像の上で一価な θ_α の枝をとり　$\sigma_\alpha(\tau) := \left\lceil \frac{1}{2\pi}\theta_\alpha(\tau(1)) \right\rceil - \left\lceil \frac{1}{2\pi}\theta_\alpha(\tau(0)) \right\rceil$

これが cocycle になることは容易にわかる　$[\sigma_\alpha]$ は生成元になる

- $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \longrightarrow S^1$ を変換関数　$g_{\alpha\beta} = e^{i\varphi_{\alpha\beta}}$ として　$\left(\begin{array}{c}\varphi_{\alpha\beta} = -\varphi_{\beta\alpha} \\ \text{とする}\end{array}\right)$

$\theta_\alpha = \varphi_{\alpha\beta} + \theta_\beta$ の関係より

$$\begin{array}{ccc} \{\sigma_\alpha\} & \overset{\delta}{\longmapsto} & 0 \\ & & \uparrow -d \\ & & \omega_{\alpha\beta} \end{array}$$

$$(\delta\sigma)_{\alpha\beta}(\tau) = \sigma_\beta(\tau) - \sigma_\alpha(\tau)$$

$$= \left\lceil \tfrac{1}{2\pi}\theta_\beta(\tau(1))\right\rceil - \left\lceil \tfrac{1}{2\pi}\theta_\beta(\tau(0))\right\rceil$$

$$- \left\lceil \tfrac{1}{2\pi}\theta_\alpha(\tau(1))\right\rceil + \left\lceil \tfrac{1}{2\pi}\theta_\alpha(\tau(0))\right\rceil$$

$$= \left\lceil \tfrac{1}{2\pi}\theta_\beta(\tau(1))\right\rceil - \left\lceil \tfrac{1}{2\pi}\left(\theta_\beta(\tau(1)) + \varphi_{\alpha\beta}(\tau(1))\right)\right\rceil$$

$$- \left(\left\lceil \tfrac{1}{2\pi}\theta_\beta(\tau(0))\right\rceil - \left\lceil \tfrac{1}{2\pi}\left(\theta_\beta(\tau(0)) + \varphi_{\alpha\beta}(\tau(0))\right)\right\rceil \right)$$

$\{\omega_{\alpha\beta}\} \in \check{C}^1(\mathcal{U}, S^0(\pi^{-1}(\cdot)))$ を $x \in \pi^{-1}U_{\alpha\beta}$ に対して

$$\omega_{\alpha\beta}(x) := \left\lceil \tfrac{1}{2\pi}\theta_\beta(x)\right\rceil - \left\lceil \tfrac{1}{2\pi}\left(\theta_\beta(x) + \varphi_{\alpha\beta}(x)\right)\right\rceil$$

$$= \left\lceil \tfrac{1}{2\pi}\left(\theta_\alpha(x) + \varphi_{\beta\alpha}(x)\right)\right\rceil - \left\lceil \tfrac{1}{2\pi}\theta_\alpha(x)\right\rceil$$

α, β について反対称

とおくと、 $\delta\sigma = d\omega = -D''\omega$

よって

$d_2[\{\sigma_\alpha\}] = \delta\omega$ で

$$(\delta\omega)_{\alpha\beta\gamma} = \omega_{\beta\gamma} + \omega_{\gamma\alpha} + \omega_{\alpha\beta}$$

$$= \left\lceil \frac{\theta_\beta(x)}{2\pi}\right\rceil - \left\lceil \frac{\theta_\beta(x)+\varphi_{\alpha\beta}(x)}{2\pi}\right\rceil + \left\lceil \frac{\theta_\alpha(x)}{2\pi}\right\rceil - \left\lceil \frac{\theta_\alpha(x)+\varphi_{\gamma\alpha}(x)}{2\pi}\right\rceil$$

$$+ \left\lceil \frac{\theta_\gamma(x)}{2\pi}\right\rceil - \left\lceil \frac{\theta_\gamma(x)+\varphi_{\beta\gamma}(x)}{2\pi}\right\rceil$$

$\theta_\alpha(x) = \theta_\beta(x) + \varphi_{\alpha\beta}(x)$
$\theta_\gamma(x) = \theta_\alpha(x) + \varphi_{\gamma\alpha}(x)$
とおいてよい

$$= \left\lceil \frac{\theta_\beta(x)}{2\pi}\right\rceil - \left\lceil \frac{\theta_\beta(x) + \varphi_{\alpha\beta}(x) + \varphi_{\beta\gamma}(x) + \varphi_{\gamma\alpha}(x)}{2\pi}\right\rceil$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left(\varphi_{\alpha\beta} + \varphi_{\beta\gamma} + \varphi_{\gamma\alpha}\right) = -e(E)$$ を代表する

Čech cocycle //