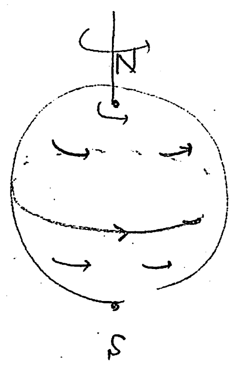
No.
Date

例 $TS^2 \to S^2$ の section s : ある軸に関する回転を与えるベクトル場

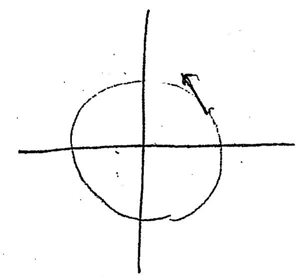


$$s^{-1}(0) = \{N, S\}$$

N と S に誘導される向き $= 1$

N のまわり ベクトル場は $-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$

$(x, y) \longmapsto (-y, x)$ 向きを保つ



S のまわり も同様

よって $e(TS^2) = \eta_{\{N,S\}}$

$$\int_{S^2} e(TS^2) = \int_{S^2} 1 \wedge \eta_{\{N,S\}} = \int_{\{N,S\}} 1 = 2 \quad //$$

2021/6/15

$E \to M$ 向き付けられたベクトル束 $m = \dim M = \operatorname{rank} E$ とする

M : コンパクト, 向き付けられている

$s : M \to E$ section $s^{-1}(0)$ が有限集合とする

点 $x \in s^{-1}(0)$ での重複度

点 x を中心とする ball B で s は $B \setminus \{x\}$ 上で消えていないものをとる. $E|_B \cong B \times \mathbb{R}^m$ (向きを保つ自明化)

をとって s を $s : B \to \mathbb{R}^m$ と見なす

No.

Date

このとき $\dfrac{s}{\|s\|} : \partial B \longrightarrow S^{m-1}$ が定まる

↑ B から誘導される向き　　← D^m の境界の向き

$\mathrm{mult}_x s := \dfrac{s}{\|s\|}$ の写像度

<u>定理</u>　上の設定で $\displaystyle\int_M e(E) = \sum_{x \in s^{-1}(0)} \mathrm{mult}_x s$

∵　Θ : E の Thom form

$s^{-1}(0) = \{x_1, \cdots, x_m\}$

B_i : 各 x_i 中心の closed ball（互いに交わらないもの）

$s^{-1}(\mathrm{Supp}\,\Theta) \subset \mathring{B}_1 \cup \cdots \cup \mathring{B}_m$ となるように Θ をとり直せる

$$\int_M e(E) = \int_M s^* \Theta$$

$$= \sum_{i=1}^m \boxed{\int_{B_i} s^* \Theta}$$ ← これが $\mathrm{mult}_{x_i}(s)$ になることを示せばよい

$E|_{B_i} \cong B_i \times \mathbb{R}^m$　　$\pi_2 : B_i \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 射影

$\theta \in \Omega_c^m(\mathbb{R}^m)$ を $\int_{\mathbb{R}^m} \theta = 1$ で、$\mathrm{Supp}\,\theta \subset \mathring{D}^m$ なるものとする.

$\pi_2^*\theta$ と Θ は共に $E|_{B_i}$ の Thom form を与えるから

$$\Theta = \pi_2^*\theta + d\beta \qquad \exists \beta \in \Omega_{cv}^{m-1}(E|_{B_i})$$

No.

Date

・ここで $R>1$ を十分大きくとり、 $\mathrm{Supp}(\beta)$ が $B_i \times D^m_R$ に含まれるとする。 ($D^m_R = \{ x \in \mathbb{R}^m \mid |x| \leqq R \}$)

・ s を $t \cdot s$ $(t \gg 1)$ におきかえて $s|_{\partial B_i}$ のノルムが常に $2R$ より大きいと仮定できる。

このとき、

$$\int_{B_i} s^* \Theta = \int_{B_i} s^*(\pi_2^* \theta + d\beta)$$

$$= \int_{B_i} (\pi_2 \circ s)^* \theta + \underbrace{\int_{\partial B_i} s^* \beta}_{}$$

$s(\partial B_i)$ 上では $\beta = 0$ より消える

・ $\pi_2 \circ s$ を改めて s と書き、

$\theta = d\sigma$ なる $(m-1)$ form $\sigma \in \Omega^{m-1}(\mathbb{R}^m)$ をとると、

$$= \int_{B_i} s^*(d\sigma) = \int_{\partial B_i} s^* \sigma$$

・ $s|_{\partial B_i}$ と $\frac{s}{\|s\|}\Big|_{\partial B_i}$ はホモトピックで ホモトピーの像の上で σ は closed であるから

$$= \int_{\partial B_i} \left(\frac{s}{\|s\|} \right)^* \sigma$$

$\int_{S^{m-1}} \sigma = \int_{D^m} d\sigma = \int_{D^m} \theta = 1$ ゆえ σ は $H^{m-1}(S^{m-1})$ の generator であってこれは $\mathrm{mult}_{x_i}(s)$ に等しい //

No.

Date

$\mathbb{Z}$係数での Thom 同型 ($\mathbb{Z}/2$)

(X: 一般, singular cohomology)

[Milnor-Stasheff §10 など
Husemoller "fiber bundles" Chap 17.

- relative (co)homology

$A \subset X$ 部分空間

$$\begin{cases} 0 \to S_*(A) \hookrightarrow S_*(X) \to S_*(X,A) \to 0 \\ 0 \to S^*(X,A) \to S^*(X) \to S^*(A) \to 0 \end{cases}$$

singular chain cpx (co)

$S_*(X,A)$, $S^*(X,A)$ の (コ)ホモロジーとして

相対 (コ)ホモロジー $H_*(X,A)$, $H^*(X,A)$ が定まった.

長完全列

$$\to H_*(A) \to H_*(X) \to H_*(X,A) \to H_{*-1}(A) \to$$

$$\to H^*(X,A) \to H^*(X) \to H^*(A) \to H^{*+1}(X,A) \to$$

気持ち

$H_*(X,A)$　X の chain で境界が A にふくまれるもの

$H^*(X,A)$　X の cocycle で A 上で消えているもの

- $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ の relative cohomology ($= H_c^*(\mathbb{R}^n)$ に対応)

長完全列

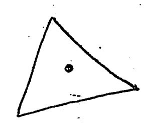
$$\to \underset{\underset{0}{\|}}{\tilde{H}^{*-1}(\mathbb{R}^n)} \to \underset{\underset{\tilde{H}^{*-1}(S^{n-1})}{\cong}}{\tilde{H}^{*-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})} \to H^*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to \underset{\underset{0}{\|}}{\tilde{H}^*(\mathbb{R}^n)} \to$$

ゆえ $H^*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \tilde{H}^{*-1}(S^{n-1})$

$$\cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (* = n) \\ 0 & (* \neq n) \end{cases}$$

注. $\mathbb{R}^n$の向き $\longleftrightarrow$ $H^*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ の生成元をえらぶ

- ペア (D^n, S^{n-1}) の相対コホモロジーも同じ
- $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ の生成元 ($\Delta_n \xhookrightarrow{\sigma} \mathbb{R}^n$ 原点を内部に含む n 単体)



$\updownarrow$ dual

- $H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ の生成元 : $0 \in \mathbb{R}^n$ での「デルタ関数」のイメージ

(中岡「位相幾何学」 Hatcher "Algebraic Topology" などを見よ)

Cup積

$$\cup : H^p(X) \times H^q(X) \longrightarrow H^{p+q}(X)$$

($\leftrightarrow$ de Rham コホモロジーの wedge 積 $\wedge$)

$$\Delta_n = \left\{ (t_0, \dots, t_n) \;\middle|\; \begin{array}{l} t_i \geq 0 \\ t_0 + \dots + t_n = 1 \end{array} \right\}$$ 標準 n 単体

頂点 $P_i := (0, \dots, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$ $(i = 0, \dots, n)$

$k \leq n$ として $0 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_k \leq n$ に対して

$[i_0, \dots, i_k] : \Delta_k \longrightarrow \Delta_n$ $P_0, \dots, P_k$ を $P_{i_0}, \dots, P_{i_k}$ に写す (affine) 線形写像

$\alpha \in S^p(X)$, $\beta \in S^q(X)$ に対して $\alpha \cup \beta \in S^{p+q}(X)$ をここで定める

各 singular $(p+q)$-simplex $\sigma : \Delta_{p+q} \longrightarrow X$ に対して

$$(\alpha \cup \beta)(\sigma) := \underbrace{\alpha(\sigma \circ [0, 1, \dots, p])}_{\text{前の}p\text{面}} \; \underbrace{\beta(\sigma \circ [p, p+1, \dots, p+q])}_{\text{後の}q\text{面}}$$

No.

Date

演習 $d : S^*(X) \to S^{*+1}(X)$ singular cochain cpx の微分

$$d(\alpha \cup \beta) = d\alpha \cup \beta + (-1)^p \alpha \cup d\beta$$

⇝ cohomology に積が誘導 $\cup : H^p(X) \times H^q(X) \to H^{p+q}(X)$

注 $(\alpha \cup \beta) \cup \gamma = \alpha \cup (\beta \cup \gamma)$ は明らか。

cochain に対しては $\alpha \cup \beta \neq (-1)^{pq} \beta \cup \alpha$

cohomology では $[\alpha] \cup [\beta] = (-1)^{pq} [\beta] \cup [\alpha]$ が成立

relative の場合 $A, B \subset X$ $\{A, B\}$ が切除対のとき

$$H^p(X, A) \times H^q(X, B) \to H^{p+q}(X, A \cup B) \quad \text{が定まる}$$

$S^p(X, A) \subset S^p(X)$ （A上の chain に対しては消える）

$$S^p(X, A) \times S^q(X, B) \xrightarrow{\cup} \left(S_{p+q}(X) \middle/ S_{p+q}(A) + S_{p+q}(B) \right)^*$$

A又はBに含まれる chain で消える

・「切除対」⇔「$S_*(A) + S_*(B) \to S_*(A \cup B)$ が chain homotopy 同値」

ならば 右側の complex は $S^{p+q}(X, A \cup B)$ と chain homotopy 同値

なので コホモロジーの積

$$H^p(X, A) \times H^q(X, B) \to H^{p+q}(X, A \cup B) \quad \text{が誘導される}$$

(切除対の例) $\left\{\begin{array}{l}\cdot\ A, B \text{ が open set} \\ \cdot\ A, B \text{ が CW複体 } X \text{ の subcomplex.} \\ \cdot\ A = B\end{array}\right.$

- Thom 同型　X: good open cover を持つ パラコンパクト Hausdorff 空間 (もっと一般の位相空間も可)

係数 $\mathbb{Z}$ 又は $\mathbb{Z}/2$ で考える.

$E \to X$ rank n 実ベクトル束　係数が $\mathbb{Z}$ の場合は向き付けられていると仮定

- 向きの局所系

$\{H^n(E_x, E_x \setminus \{0\})\}_{x \in X}$ $\left(\begin{array}{l} U \subset X \text{ 可縮 } \quad \forall x \in U \\ H^n(E|_U, E|_U \setminus U) \cong H^n(E_x, E_x \setminus \{0\}) \\ \text{により自明化} \end{array} \right)$

- $E \to X$ の向きを与える

$\Longleftrightarrow$ 向きの局所系の自明化をとる

- $\mathbb{Z}/2$ 係数のときは常に自明になっている. ($H^n(E_x, E_x\setminus\{0\}) \cong \mathbb{Z}/2$ の生成元は unique)

定理 以上の仮定のもと

(1) $\exists!\, \Theta \in H^n(E, E \setminus X)$ s.t. $\Theta|_{E_x} \in H^n(E_x, E_x \setminus \{0\})$ は E_x の向きを与える生成元

(X: 零切断)

(2)
$$\begin{array}{ccc} H^k(X) & \longrightarrow & H^{k+n}(E, E\setminus X) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \alpha & \longmapsto & \pi^*\alpha \cup \Theta \end{array}$$
は同型 ($\forall k$)

($\pi^*\alpha \in H^k(E) = H^k(E, \phi)$ に注意)

(証明) Čech-Singular complex を使って前と同様にする

(但し "integration along the fiber" が cochain level では定義できない ので差がある)

No.

Date

$\mathbb{Z}$係数のときに議論する（$\mathbb{Z}/2$係数でも同様）

$\mathcal{U}$: Xの good open covering.

$$K^{p,q} = \check{C}^p(\mathcal{U}, S^q(E|_\circ, E|_\circ \setminus X))$$

$$= \prod_{\alpha_0 < \cdots < \alpha_p} S^q(E|_{U_{\alpha_0 \cdots \alpha_p}}, E|_{U_{\alpha_0\cdots\alpha_p}} \setminus X)$$

d: singular の微分

δ: $\check{C}$ech の微分

・ p方向（よこ）には $p=0$ のみにコホモロジーがある

$$0 \to S^q_{\mathcal{U}}(E, E\setminus X) \to K^{0,q} \to K^{1,q} \to K^{2,q} \to \cdots \text{ は exact}$$

$$\Rightarrow \quad H^*_D(K^*) \cong H^*_d H^0_\delta(K^{*,*}) = H^*(E, E\setminus X)$$

・ q方向のコホモロジー $(E|_{U_{\alpha_0\cdots\alpha_p}}, E|_{U_{\alpha_0\cdots\alpha_p}} \setminus X)$

$$\underset{\text{ホモトピー同値}}{\sim} (E_x, E_x \setminus \{0\}) \qquad x \in U_{\alpha_0\cdots\alpha_p}$$

より $$H^q_d(K^{p,*}) \cong \begin{cases} \check{C}^p(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) & q = n \\ 0 & q \neq n \end{cases}$$

向きをつかって
同型をつくった

$$\therefore \quad H^p_\delta H^q_d(K^{*,*}) \cong \begin{cases} H^p_{\check{C}ech}(X; \mathbb{Z}) & q = n \\ 0 & q \neq n \end{cases}$$

前と同じ議論で $$\underset{\underset{H^{p+n}(E, E\setminus X)}{\|}}{H^{p+n}_D(K^*)} \cong H^p_\delta H^n_d(K^{*,*}) \cong H^p_{\check{C}ech}(X, \mathbb{Z})$$

$\Rightarrow$ Thom 同型を得る.

・同型の下で $1 \in H^0(X, \mathbb{Z})$ に対応する元を $\Theta \in H^n(E, E \setminus X)$ とする.

(1)つ特徴付けをみたしている事を check.

$$1 \in H^0(X) \longleftrightarrow \text{Čech cocycle } \{1_\alpha = 1\}_\alpha \in \check{C}^0(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$$

$$\longleftrightarrow \{\theta_\alpha\} \in \prod_\alpha H^n(E|_{U_\alpha}, E|_{U_\alpha} \setminus X)$$

$$= H^n_d(K^{0,*})$$

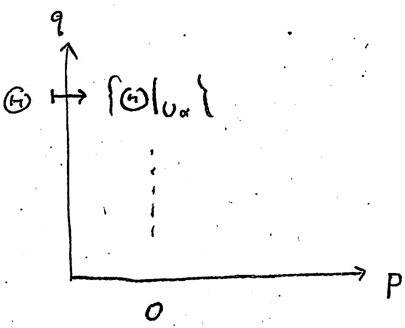
orientation を与える class の集まり

$[\Theta] \in H^n(E, E \setminus X)$

$$\longleftrightarrow \{\Theta|_{U_\alpha}\} \in K^{0,n} \quad \text{D-cocycle}$$

(d-closed & δ-closed)

nで $\Theta \mapsto \{\Theta|_{U_\alpha}\}$



$\{\theta_\alpha\}$ と $\{\Theta|_{U_\alpha}\}$ は $H^0_\delta H^n_d$ で同じ元を与える

$$\Longrightarrow [\Theta|_{U_\alpha}] = \theta_\alpha \quad \text{in } H^n(E|_{U_\alpha}, E|_{U_\alpha} \setminus X)$$

つまり $\Theta|_{E_x}$ は orientation を与える

逆に $\Theta|_{E_x}$ が orientation を与えていれば, $1 \in H^0(X)$ に対応する

・Thom 同型 が $H^p(X) \ni \alpha \longmapsto \pi^*\alpha \cup \Theta \in H^{n+p}(E, E \setminus X)$

で与えられることを示す.

$H^*(X)$-module の準同型であることを示せばよい. ($H^*(E, E \setminus X)$ には π^* により 加群構造を入れる)

$$K_X^{p,q} = \check{C}^p(\mathcal{U}, S^q(\cdot)) \qquad X \text{の Čech-singular complex}$$

$$= \prod_{\alpha_0 < \cdots < \alpha_p} S^q(U_{\alpha_0 \cdots \alpha_p})$$

• $K_X^{p,q} \times K^{p',q'} \longrightarrow K^{p+p',q+q'}$ （加群の構造）

$$(\{\omega_{\alpha_0\cdots\alpha_p}\},\ \{\tau_{\alpha_0\cdots\alpha_{p'}}\}) \longmapsto \omega\cdot\tau$$

$$\omega_{\alpha_0\cdots\alpha_p} \in S^q(U_{\alpha_0\cdots\alpha_p}), \qquad \tau_{\alpha_0\cdots\alpha_{p'}} \in S^{q'}(E|_{U_{\alpha_0\cdots\alpha_{p'}}},\ E|_{U_{\alpha_0\cdots\alpha_{p'}}}\setminus X)$$

$$(\omega\cdot\tau)_{\alpha_0\cdots\alpha_{p+q}} = \pm\,\pi^*\omega_{\alpha_0\cdots\alpha_p} \cup \tau_{\alpha_p\alpha_{p+1}\cdots\alpha_{p+q}} \quad \text{if } \alpha_0<\alpha_1<\cdots<\alpha_{p+q}$$

（$\alpha_0<\cdots<\alpha_{p+q}$ でないときは
これを反対称に拡張する）

Dに関するLeibniz rule を満たすように符号(±)を決められる（レポート問題4.1）

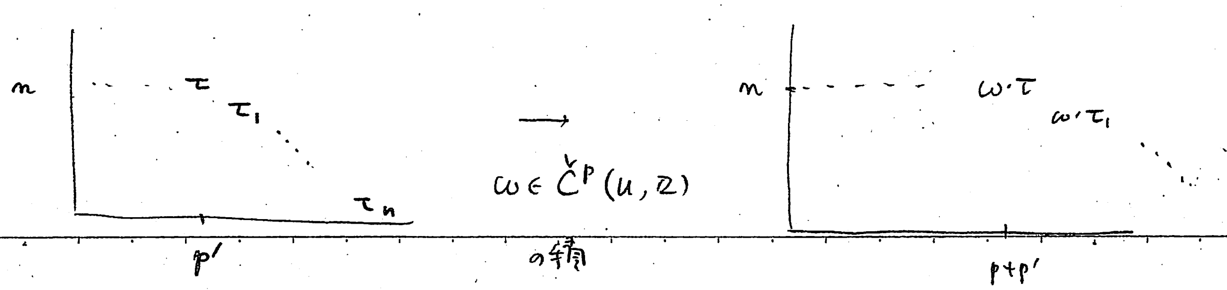
⇒ コホモロジーの写像を誘導

• この module-structure は $S_u^q(X)\times S_u^{q'}(E,E\setminus X) \longrightarrow S_u^{q+q'}(E,E\setminus X)$
(p = p' = 0 で)　$(\omega,\ \tau) \longmapsto \pi^*\omega\cup\tau$

を誘導 ⇒ 通常の module structure $H^*(X) \curvearrowright H^*(E,E\setminus X)$
と一致する

• $[\omega]\in \check{H}^p(\mathcal{U},\mathbb{Z})$ の $H_\delta^{p'} H_d^n(K^{*,*}) \ni [[\tau]]$ への作用をみる

τ は D-cocycle $\tau+\tau_1+\cdots+\tau_p$ に拡張された



$[[\tau]] \longmapsto [[\omega\cdot\tau]]$ なる作用

$$[[\tau]] = \{ n_{\alpha_0\cdots\alpha_p}\,\theta_{\alpha_0\cdots\alpha_p} \} \qquad \theta_{\alpha_0\cdots\alpha_p} \in H^n(E|_{U_{\alpha_0\cdots\alpha_p}}, E|_{U_{\alpha_0\cdots\alpha_p}} \setminus X)$$

orientation class

- $\omega\cdot\tau$ は Čech cohomology の

cup 積 $\quad \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) \times \check{H}^{p'}(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) \longrightarrow \check{H}^{p+p'}(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$

に対応することは明らか

(Čech coh $\check{H}(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$ の cup 積も上と同様に定義される

これが singular coh の cup 積と同一視されることは $K_X^{p,q}$ に積を

導入することにより同様に示せる.)

(注) X が finite good cover を持つときは good cover の数に関する

帰納法で示せる.

上の議論は finite とは限らない場合にその議論を拡張

したものとみなせる. (「generalized Mayer-Vietoris」: よこ方向の exactness)

"spectral sequence" の特別な場合と考えている

(注) $H^*(E, E\setminus X) \cong H^*(D(E), S(E)) \cong \tilde{H}^*(T(E))$

$T(E) := D(E)/S(E)$

Thom space という

<u>より道</u> : スペクトル系列 (Leray, Serre)

$\pi : E \longrightarrow X$ fiber 束 (fiber を F とする)

$\mathcal{U}$: good open cover of X

$$K^{p,q} = \check{C}^p(\mathcal{U}, S^q(\pi^{-1}(\cdot))) = \prod_{\alpha_0<\cdots<\alpha_p} S^q(\pi^{-1} U_{\alpha_0\cdots\alpha_p})$$

double complex.