ベクトル束

定義 $p: E \longrightarrow M$ が rank n の（位相的）複素ベクトル束

$\Longleftrightarrow$ ⓪ E, M : 位相空間，p は連続全射．

① $^\forall x \in M$ に対して $E_x := p^{-1}(x)$ は n次元 $\mathbb{C}$ベクトル空間の構造をもつ（与えられている）

[ファイバー fiber]

② $^\forall x \in M$ $\exists U$: xの open nbd

$\exists$ homeo（局所自明化, local trivialization）φ

$$\begin{tikzcd} E|_U := p^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi", "\cong"'] \arrow[dr, "p"'] & & U \times \mathbb{C}^n \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

$\pi_1(x, v) = x$

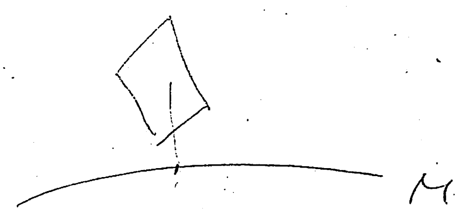
第1射影

s.t. ・$p = \pi_1 \circ \varphi$

・φ が fiber に誘導する写像

$\varphi_x : E_x = p^{-1}(x) \longrightarrow \mathbb{C}^n$ は $\mathbb{C}$ベクトル空間の同型

(注) 実ベクトル束も同様に定義される



(注) M : C^∞級多様体 のとき

$p: E \longrightarrow M$ が C^∞級ベクトル束

$\Longleftrightarrow$ E: C^∞級多様体，p: C^∞ map，①，② を満す

但し ② の local trivialization φ が "diffeo" という条件にかえる

(注) $N \subset M$ subspace $E|_N = p^{-1}(N) \to N$ はベクトル束

(例) 自明なベクトル束 $E = M \times \mathbb{C}^n \xrightarrow{p} M$

は rank n のベクトル束

(例) 接ベクトル束 M: C^∞級多様体

$$TM = \bigsqcup_{x \in M} T_x M$$ に C^∞級多様体の構造が入る

(演習)

$p: TM \longrightarrow M \qquad p(T_x M) = x$

局所座標 $(U; x_1, \dots, x_m)$

$\rightsquigarrow$ 局所自明化 $TM|_U \xrightarrow{\sim} U \times \mathbb{R}^m$

$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \longmapsto (p, e_i)$ 実ベクトル束

(注) M: 複素多様体 (局所的に $\mathbb{C}^m$ の open set と同相で座標変換が正則)

$\rightsquigarrow$ TM は複素ベクトル束 (さらに正則ベクトル束にも)

<u>定義</u> rank 1 のベクトル束を直線束 (line bundle) という

(例) (自明でない) line bundle

Möbius の帯 $\mathbb{R} \times [0,1] \big/ _{(x,0) \sim (-x,1)}$

$$\downarrow$$

$$[0,1] \big/ _{0 \sim 1} = S^1$$

No.

Date

(例) [自明でない $\mathbb{C}$ line bdle]

$$\mathbb{CP}^n = \{ \ell \subset \mathbb{C}^{n+1} \mid \ell \text{ は 1次元 } \mathbb{C} \text{ subspace} \}$$

tautological line bdle

$$\begin{array}{l} L = \{ (\ell, v) \in \mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^{n+1} \mid v \in \ell \} \\ \quad p \downarrow \\ \mathbb{CP}^n \qquad\qquad p(\ell, v) = \ell \end{array}$$

は C^∞級 直線束 (演習)

・ $L_\ell = \{ (\ell, v) \mid v \in \ell \} \cong \ell$ fiber

・ local trivialization $U_0 = \{ [1, z_1, \ldots, z_n] \}$

$$\begin{array}{ccc} L|_{U_0} & \longrightarrow & U_0 \times \mathbb{C} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (\ell, v) & \longmapsto & (\ell, v_0) \end{array}$$

但し $v = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$

$\ell = [1, z_1, \ldots, z_n]$ とするとき $v \in \ell$ より

$$v = (v_0, v_0 z_1, \ldots, v_0 z_n)$$

(例) $\mathbb{RP}^n$ 上の tautological line bdle も同様に定義される

$\mathbb{RP}^1 = S^1$ 上の tautological line bdle $\cong$ Möbius の帯.

定義 $p: E \to M$, $q: F \to M$ ベクトル束 が 同型 ((位相同型))

$\Longleftrightarrow$ $\exists$ 同相写像 $\varphi: E \xrightarrow{\cong} F$ $\quad q \circ \varphi = p$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & F \arrow[dl, "q"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

$\forall x\in M$ $\varphi_x : E_x \longrightarrow F_x$ は線型同型.

定義（fiber束）

$p: E \longrightarrow M$ が F を fiber とする fiber束

⓪ p は連続全射, E, F, M: 位相空間

① $\forall x \in M$ $\exists U$: x の open nbd

$\exists$ local trivialization φ:

$$\begin{tikzcd} E|_U \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "p"'] & & U \times F \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

• さらに fiber F が何らかの構造をもち, $\varphi_x : E_x \xrightarrow{\cong} F$ が

その構造を保つことを要求することもある

⇝ ベクトル束は fiber束の特別な場合.

変換関数によるベクトル束の定義

transition function

$E \longrightarrow M$ $\mathbb{C}$ vector束

$$\begin{cases} \exists \{U_\alpha\} : M \text{ の open covering} \\ \exists \varphi_\alpha : E|_{U_\alpha} \xrightarrow{\sim} U_\alpha \times \mathbb{C}^n \quad \text{自明化} \end{cases}$$

No.

Date

$U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta$ とおく

$$U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^n \xrightarrow[\varphi_\beta^{-1}]{\cong} E|_{U_{\alpha\beta}} \xrightarrow[\varphi_\alpha]{\cong} U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^n$$

は $(x, v) \longmapsto (x, g_{\alpha\beta}(x)v)$ の形

(各 fiber を保ち, fiber ごとに線形写像だから)

$\rightsquigarrow$ $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to GL_n(\mathbb{C})$ 連続 : 変換関数 という

<u>性質</u> (1) $g_{\alpha\alpha}(x) = id$

(2) $g_{\alpha\beta}(x) = g_{\beta\alpha}(x)^{-1}$

(3) $U_{\alpha\beta\gamma} = U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \phi$ のとき

$x \in U_{\alpha\beta\gamma}$ に対して

$$g_{\alpha\beta}(x)\, g_{\beta\gamma}(x)\, g_{\gamma\alpha}(x) = id$$

$$\left[\because \ (\varphi_\alpha \varphi_\beta^{-1})(\varphi_\beta \varphi_\gamma^{-1})(\varphi_\gamma \circ \varphi_\alpha^{-1}) = 1 \right]$$

<u>Prop</u> (1)〜(3) を満たす $\left\{ g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \xrightarrow[\text{conti}]{} GL_n(\mathbb{C}) \right\}$ が与えられたとき

これらを変換関数としてもつ ベクトル束 が 存在する

No.

Date

☺ $E = \bigsqcup_\alpha (U_\alpha \times \mathbb{C}^n) / \sim$

但し $(x, v) \in U_\alpha \times \mathbb{C}^n$ と $(y, w) \in U_\beta \times \mathbb{C}^n$ に対して

$(x, v) \sim (y, w) \iff x = y$ かつ $v = g_{\alpha\beta}(x) w$

$p : E \longrightarrow M$ を $p([x\ v]) = x$ と定める

☺ (1)〜(3) から $\sim$ は同値関係になることをcheck

$U_\alpha \times \mathbb{C}^n \longrightarrow E|_{U_\alpha}$ は同相写像になる (演習)

(全単射で‥)

<u>Prop</u> (1)〜(3) を満たす $\{g_{\alpha\beta}\}$, $\{g'_{\alpha\beta}\}$ が同型なベクトル束を与える

$\iff$ $^\exists \lambda_\alpha : U_\alpha \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ Conti

s.t. $g'_{\alpha\beta}(x) = \lambda_\alpha(x)\, g_{\alpha\beta}(x)\, \lambda_\beta(x)^{-1}$ $x \in U_{\alpha\beta}$

☺ $(\Rightarrow)$ E, E' を $\{g_{\alpha\beta}\}$, $\{g'_{\alpha\beta}\}$ の与えるベクトル束

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\lambda", "\cong"'] \arrow[dr] & & E' \arrow[dl] \\ & M & \end{tikzcd}$$

$$U_\alpha \times \mathbb{C}^n \xrightarrow[\varphi_\alpha^{-1}]{\cong} E|_{U_\alpha} \xrightarrow{\lambda} E'|_{U_\alpha} \xrightarrow[\varphi'_\alpha]{\cong} U_\alpha \times \mathbb{C}^n$$

$$(x, v) \longmapsto (x, \lambda_\alpha(x) v)$$

の形 $\lambda_\alpha : U_\alpha \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$

$x \in U_{\alpha\beta}$ において

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^n \arrow[rrr, bend left, "\lambda_\alpha(x)"] & & & \mathbb{C}^n \\
& E_x \arrow[ul, "\varphi_\alpha"'] \arrow[dl, "\varphi_\beta"] \arrow[r, "\cong"', "\lambda_x"] & E_x' \arrow[ur, "\varphi_\alpha'"] \arrow[dr, "\varphi_\beta'"'] & \\
\mathbb{C}^n \arrow[uu, "g_{\alpha\beta}(x)"] \arrow[rrr, bend right, "\lambda_\beta(x)"'] & & & \mathbb{C}^n \arrow[uu, "g_{\alpha\beta}'(x)"']
\end{tikzcd}$$

より $\quad \lambda_\alpha(x)\, g_{\alpha\beta}(x) = g'_{\alpha\beta}(x)\, \lambda_\beta(x)$

$(\Leftarrow)$ 局所自明化により U_α 上で $\lambda_\alpha(x)$ により同型を与える

大域的にはりあうことをみる（演習）

<u>(系)</u> $\{g_{\alpha\beta}\}$ が自明なベクトル束を定める

$\iff \quad g_{\alpha\beta}(x) = \lambda_\alpha(x) \cdot \lambda_\beta(x)^{-1}$ をみたす $\lambda_\alpha : U_\alpha \to GL_n(\mathbb{C})$

が存在する

(例) $TM \to M$ の変換関数

$(U_\alpha, x_1^\alpha, \ldots, x_m^\alpha) \qquad g_{\alpha\beta}(p) = \left(\dfrac{\partial x_i^\alpha}{\partial x_j^\beta}(p) \right)_{ij}$

No.

Date

注. M: C^∞多様体

$E \to M$ が C^∞級ベクトル束 $\longleftrightarrow$ C^∞級変換関数

$g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$

[M: 複素多様体

$E \to M$ が正則ベクトル束 $\longleftrightarrow$ $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to GL_n(\mathbb{C})$

が正則]

2021/4/12

自明なベクトル束の判定条件

$\mathbb{C}$ベクトル束 $E \xrightarrow[p]{} M$ が自明 $\Longleftrightarrow$ $E \cong M \times \mathbb{C}^n$

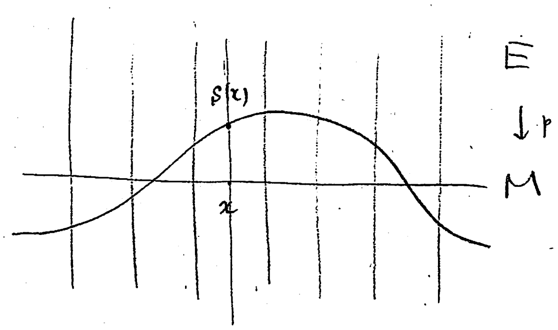
ベクトル束の同型

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "p"'] & & M \times \mathbb{C}^n \arrow[dl, "\pi_1"] \\
& M &
\end{tikzcd}
$$

定義 $p : E \to M$ ベクトル束(もっと一般に fiber束)

の切断 (section) とは連続写像 $s : M \longrightarrow E$ で $p \circ s = id_M$

を満たすもの.



$s(x) \in E_x$