幾何学 I　演習問題 No.9 略解

問題 100　(1) $x(t) = \frac{x(0)}{1-x(0)t}$. 解は $t = 1/x(0)$ で爆発するので，完備ではない．

(2) 完備である．

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}$$

(3) 完備である．($(x(0), y(0)) \neq (0,0)$ から出発した積分曲線は原点を通ることはない．) $(x(t), y(t)) = (e^t x(0), e^t y(0))$.

(4)

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}$$

積分曲線は $x^2 - y^2 = \mathrm{const}$ を満たす．$(1,1)$ を通る積分曲線の像は $\{(x,x) : x > 0\}$ であり，この集合の点を初期値とする積分曲線は $(1,1)$ と有限時間でぶつかってしまう．従って完備ではない．

問題 101　(1) ベクトル場 $V(A)$ の点 $x(t)$ での値は基底 $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ に関して表示すると，ベクトル $Ax(t)$ で与えられる．従って x_0 を初期値とする積分曲線 $x(t)$ は

$$\frac{dx}{dt}(t) = Ax(t) \qquad x(0) = x_0$$

を満たす．これを積分して

$$x(t) = \exp(tA)x_0$$

を得る．

(2) S^{n-1} は関数 $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ を用いて $S^{n-1} = f^{-1}(1)$ と書くことができる．ここで 1 は f の正則値であるから，$p \in S^{n-1}$ に対して $T_pS^{n-1} = \mathrm{Ker}\, d_pf$ が成り立っている．(ただし T_pS^{n-1} を包含写像の微分により自然に $\mathbb{R}^n = T_p\mathbb{R}^n$ の部分空間とみなした．) 従って $d_pf(V(A)_p) = V(A)_pf = 0$ を示せば十分である．実際，

$$V(A)(f) = \left(\sum_{i,j} a_{i,j} x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum_{k,j} a_{k,j} x_j 2x_k = 0$$

となる．最後の変形で A が交代行列 $a_{k,j} = -a_{j,k}$ であることを用いた．

(3) $V(A)$ は明らかに $\mathbb{R}^n$ 上のベクトル場としてなめらかである．$\mathbb{R}^n$ の部分多様体である S^{n-1} 上のベクトル場としてもなめらかであることを示そう．$p \in S^{n-1}$ の座標近傍 $(U; y_1, \ldots, y_n)$ を $U \cap S^{n-1} = \{y_n = 0\}$ となるようにとることができる．$V(A)$ は滑らかなので，この座標系において，U 上の C^∞ 級関数 $\xi_i(y_1, \ldots, y_n)$ により

$$V(A) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(y_1, \ldots, y_n) \frac{\partial}{\partial y_i}$$

と座標表示される．$V(A)$ が S^{n-1} に接しているという条件から，$\xi_n(y_1, \ldots, y_{n-1}, 0) = 0$ である．S^{n-1} の局所座標は $(U \cap S^{n-1}; y_1, \ldots, y_{n-1})$ で与えられ，この座標に関して

$$V(A) = \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i(y_1, \ldots, y_{n-1}, 0) \frac{\partial}{\partial y_i}$$

と表示できる．従って $V(A)$ は S^{n-1} 上のベクトル場として C^∞ 級である．

flow $\varphi_t(x)$ が S^{n-1} を保つことを確認しておく．$x_0 \in S^{n-1}$ のとき，

$$\begin{aligned}\|\varphi_s(x)\|^2 &= {}^{\mathrm{t}}\varphi_s(x)\cdot\varphi_s(x)\\ &= {}^{\mathrm{t}}x_0\exp(s{}^{\mathrm{t}}A)\exp(sA)x_0 = {}^{\mathrm{t}}x_0\exp(-sA)\exp(sA)x_0\\ &= {}^{\mathrm{t}}x_0\cdot x_0 = 1\end{aligned}$$

注: flow φ_t が S^{n-1} を保つことは (計算しなくても) ベクトル場 $V(A)$ が S^{n-1} に接していることから従う．理由を正確に述べると次のとおり．$V(A)$ を S^{n-1} に制限して S^{n-1} 上のベクトル場とみなしたものを $V'(A)$ と書く．包含写像を $i\colon S^{n-1}\to\mathbb{R}^n$ と書くとき，$p\in S^{n-1}$ に対して $d_pi(V'(A)_p) = V(A)_{i(p)}$ であることに注意しよう．任意の点 $p\in S^{n-1}$ に対して p を初期値とする $V'(A)$ の積分曲線 $c(t)$ が存在する．ここで $i(c(t))$ が p を初期値とする $V(A)$ の積分曲線であることを示せばよい．(なぜなら，そのとき $i(c(t)) = \varphi_t(p)$ であり，φ_t が S^{n-1} を保つことが分かるから．) $i(c(0)) = i(p) = p$ であり，

$$\frac{d}{dt}i(c(t)) = d_{c(t)}i\left(\frac{dc}{dt}(t)\right) = d_{c(t)}i(V'(A)_{c(t)}) = V(A)_{i(c(t))}$$

従って $i(c(t))$ は $V(A)$ の積分曲線である．

(4) $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$ とおく．No.8 の問題 93 を使った直接計算により，

$$\begin{aligned}[V(A),V(B)] &= \sum_k\left\{\left(V(A)\left(\sum_l b_{k,l}x_l\right)\right)\frac{\partial}{\partial x_k} - \left(V(B)\left(\sum_l a_{k,l}x_l\right)\right)\right\}\frac{\partial}{\partial x_k}\\ &= \sum_k\left\{\left(\sum_{i,j}a_{i,j}x_j\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_l b_{k,l}x_l\right)\right) - \left(\sum_{i,j}b_{i,j}x_j\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_l a_{k,l}x_l\right)\right)\right\}\frac{\partial}{\partial x_k}\\ &= \sum_k\left\{\sum_{i,j}b_{k,i}a_{i,j}x_j - \sum_{i,j}a_{k,i}b_{i,j}x_j\right\}\frac{\partial}{\partial x_k}\\ &= V(BA-AB) = -V([A,B])\end{aligned}$$

$\boxed{\text{採点基準}}$ 各小問 1 点で計 4 点.

(1) は $x(t)$ に対する正しい微分方程式を立てているかどうかを見る．

(2) は $V(A)_p \perp p$ を示していても可とする．

(3) はベクトル場が滑らかであることの局所座標による定義にもどって考えているかどうか (単に「滑らかなベクトル場の制限だから滑らか」は認めない)，またフローが S^{n-1} を保っていることを計算して確かめている or 理由を正しく述べている (ベクトル場が S^{n-1} に接しているから明らか，でも認める) かを見る．[滑らかさと S^{n-1} を保つことの両方できて 1 点．] ベクトル場が滑らかであることの証明の別解としては，$f\mapsto(V(A)(f)\colon p\mapsto V(A)_p(f))$ が，$C^\infty(S^{n-1})\to C^\infty(S^{n-1})$ なる写像を定めていることを示す，などもありうる．(授業で $C^\infty(M)\to C^\infty(M)$ なるライプニッツ則を満たす線形写像が C^∞ 級ベクトル場に対応することを説明した．)

(4) は正しく計算していれば OK．別解としてはちょっと高度であるが $V(A)$ のフロー $\varphi_t(x) = \exp(tA)x$ に対して Lie 微分 $\frac{d}{dt}(\varphi_{-t})_*V(B)|_{t=0}$ を計算するのも OK．($((\varphi_{-t})_*V(B))_p = e^{-tA}Be^{tA}p$ となる．)

問題 102 もし積分曲線 $c\colon\mathbb{R}\to M$ が存在すれば，$f(c(t))$ は $\mathbb{R}$ 上の C^∞ 級関数で $\frac{d}{dt}f(c(t)) = \frac{dc}{dt}(t)(f) = X_{c(t)}(f) = f(c(t))^2+1$ を満たす．この微分方程式の一般解は $f(c(t)) = \tan(t+a)$ であるが，これは $\mathbb{R}$ 全体で C^∞ 級になりえない．

問題 103 $\overline{B_\delta(a)} \subset U$ となる $\delta > 0$ をとる．また $\overline{B_\delta(a)}$ 上での f の Lipschitz 定数を K，$|f|$ の最大値を M とする．つまり

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|, \qquad |f(x)| \leq M \qquad (\forall x, y \in \overline{B_\delta(a)})$$

が成り立つとする．$\epsilon > 0$ を $M\epsilon < \delta$ なるものとするとき，集合

$$X = \{x(t) \in C^0([-\epsilon, \epsilon]) : \|x - a\|_{C^0} \leq \delta\}$$

は写像 $\mathcal{F}\colon x(t) \mapsto a + \int_0^t f(x(s))ds$ で閉じていることが分かる．ここで $\|u\|_{C^0} = \sup_{s \in [-\epsilon, \epsilon]} |u(s)|$ は sup ノルムである．また $x_1, x_2 \in X$ に対して

$$\|\mathcal{F}(x_1) - \mathcal{F}(x_2)\|_{C^0} = \sup_{t \in [-\epsilon, \epsilon]} \left| \int_0^t (f(x_1(s)) - f(x_2(s)))ds \right| \leq \epsilon K \|x_1 - x_2\|_{C^0}$$

であるから，さらに $\epsilon > 0$ が $\epsilon K < 1$ を満たせば $\mathcal{F}\colon X \to X$ は縮小写像である．X は完備距離空間なので，縮小写像の原理から主張が従う．

問題 108 問題 103 の解は

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t) + a), \qquad x(0) = 0$$

の解により $a + x(t)$ で与えられる．従って，初期値に関する滑らかさの問題は，パラメータを含んだ微分方程式の解の滑らかさの問題に帰着される．そこで，一般に微分方程式

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t), a, t), \qquad x(0) = 0 \tag{1}$$

の解の存在と滑らかさについて議論しよう．ここで $f(x, a, t)$ は $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ の原点 $(x, a, t) = (0, 0, 0)$ のある開近傍で定義された C^1 級関数とする．問題 103 と同じ議論を

$$X = \{x(a, t) \in C^0(\overline{B_r(0)} \times [-\epsilon, \epsilon]) : \|x\|_{C^0} \leq \delta\}$$

という形の関数空間で行うことにより，ある適当な $\epsilon > 0$, $r > 0$, $\delta > 0$ に対して積分方程式

$$x(a, t) = \int_0^t f(x(a, s), a, s)ds$$

解 $x(a, t) \in X$ が一意に存在することが分かる．(ここで f は $\overline{B_\delta(0)} \times \overline{B_r(0)} \times [-\epsilon, \epsilon]$ を含む開集合で定義されているものとする．) このとき $x(a, t)$ は a を止めたとき (1) の一意な解となっている．次に解 $x(a, t)$ が C^1 級であることを示そう．$\frac{\partial x}{\partial t}$ が連続であることは微分方程式 (1) から明らかであるから，$\frac{\partial x}{\partial a_j}$ が存在して連続であることを示せばよい．$x(a, t)$ が C^1 級であれば $g_{i,j}(a, t) = \frac{\partial x_i}{\partial a_j}(a, t)$ は次の微分方程式を満たすはずである．

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} g_{i,j}(a, t) &= \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x(a, t), a, t) g_{k,j}(a, t) + \frac{\partial f_i}{\partial a_j}(x(a, t), a, t) \\ g_{i,j}(a, 0) &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

すなわち $g_{i,j}$ は非同時の線形微分方程式の解である．係数の関数 $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x(a, t), a, t)$，$\frac{\partial f_i}{\partial a_j}(x(a, t), a, t)$ の連続性から，上の方程式 (正確にはこれを積分方程式に書き直したもの) の解 $g_{i,j}(a, t)$ は

$\overline{B_r(0)} \times [-\epsilon, \epsilon]$ 上の連続関数として一意に存在する．微分方程式が線形なので，定義域をより小さくする必要はないことに注意しておこう．実際，

$$L = \sup_{(a,t)\in\overline{B_r(0)}\times[-\epsilon,\epsilon]} \left\| \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x(a,t),a,t) \right)_{i,k} \right\|$$

とおくと，解が $t \in [-1/(2L), 1/(2L)] \cap [-\epsilon, \epsilon]$ の範囲で存在することが縮小写像の原理から従うが，これを少しづつ大きい区間へと接続してゆけばよい．$g_{i,j}$ が $\frac{\partial x_i}{\partial a_j}$ に等しいことを示そう．以下では $a \in \overline{B_r(0)}$ を固定する．ベクトル値関数 $g_i(a,t)$ を $g_i(a,t) = (g_{i,j}(a,t))_{j=1,\dots,m}$ とおく．微小なベクトル $\delta a \in \mathbb{R}^m$ に対して (ただし δa は $a + \delta a \in \overline{B_r(0)}$ となるようにとるものとする)

$$\begin{aligned} x_i(a+\delta a, t) &= \int_0^t f_i(x(a+\delta a, s), a+\delta a, s) ds \\ x_i(a,t) &= \int_0^t f_i(x(a,s),a,s) ds \\ g_i(a,t)\cdot\delta a &= \int_0^t \left(\sum_k \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x(a,s),a,s)\cdot(g_k(a,s)\cdot\delta a) + \frac{\partial f_i}{\partial a}(x(a,s),a,s)\cdot\delta a \right) ds \end{aligned}$$

が成立する．簡単のため $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x(a,s),a,s)$, $\frac{\partial f_i}{\partial a}(x(a,s),a,s)$ を各々 $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$, $\frac{\partial f_i}{\partial a}$ と書く．上の式から，

$$\begin{aligned} &|x_i(a+\delta a,t) - x_i(a,t) - g_i(a,t)\cdot\delta a| \\ &= \left| \int_0^t \left(f_i(x(a+\delta a,s), a+\delta a, s) - f_i(x(a,s),a,s) - \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\cdot(g_k(a,s)\cdot\delta a) - \frac{\partial f_i}{\partial a}\cdot\delta a \right) ds \right| \\ &\le \int_0^t \left| f_i(x(a+\delta a,s), a+\delta a, s) - f_i(x(a,s),a,s) - \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\delta x_k - \frac{\partial f_i}{\partial a}\cdot\delta a \right| ds \\ &\quad + \int_0^t \sum_k \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\delta x_k - g_k(a,s)\cdot\delta a) \right| ds \end{aligned}$$

ただし，$\delta x_k = x_k(a+\delta a,s) - x_k(a,s)$ とおいた．f_i は C^1 級であることと，$\delta a \to 0$ のとき s について一様に $\delta x \to 0$ であることから，

$$\left| f_i(x(a+\delta a,s), a+\delta a, s) - f_i(x(a,s),a,s) - \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\delta x_k - \frac{\partial f_i}{\partial a}\cdot\delta a \right| = o(|\delta a|)$$

である．しかもこの評価は s について一様である，つまり，任意の $\epsilon' > 0$ に対してある $c > 0$ が存在して $|\delta a| < c$ のとき全ての $s \in [-\epsilon, \epsilon]$ に対して

$$\left| f_i(x(a+\delta a,s), a+\delta a, s) - f_i(x(a,s),a,s) - \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\delta x_k - \frac{\partial f_i}{\partial a}\cdot\delta a \right| \le \epsilon'|\delta a|$$

が成立する．(C^1 級関数に関する有限増分の公式 $F(x+\delta x) - F(x) = \int_x^{x+\delta x} F'(s)ds$ を用いよ．) 上の積分不等式と組み合わせて

$$|\delta x(a,t) - g(a,t)\delta a| \le \epsilon'\sqrt{n}\epsilon|\delta a| + C\int_0^t |\delta x(a,s) - g(a,s)\delta a| ds$$

ただし $C = \sup_{s\in[-\epsilon,\epsilon]} \|(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x(a,s),a,s))_{i,k}\|$ とおき，$g(a,t) = (g_{i,j}(a,t))_{i,j}$ は行列値関数と思っている．Gronwall の不等式から

$$|\delta x(a,t) - g(a,t)\delta a| \leq \epsilon' \sqrt{n}\epsilon|\delta a|e^{Ct} \leq \epsilon'\sqrt{n}\epsilon e^{C\epsilon}|\delta a|$$

これは $x(a,t)$ が点 a で全微分可能で，微分係数が $g_{i,j}(a,t)$ で与えられることを示している．以上より $x(a,t)$ は $\overline{B_r(0)} \times [-\epsilon,\epsilon]$ 上の C^1 級関数であることが分かった．

最後に $f(x,a,t)$ が C^∞ 級である場合に，(1) の解が C^∞ 級になることを示そう．上の議論で $x(a,t)$ が $\overline{B_r(0)} \times [-\epsilon,\epsilon]$ 上の C^1 級であることは分かっている．したがって $g_{i,j}(a,t)$ の満たす微分方程式 (2) は C^1 級関数で定義されている (つまり係数に現れる関数は全て C^1 級関数)．以上で $x(a,t)$ に関して行ったのと同じ議論を $g_{i,j}(a,t)$ について繰り返せば，$g_{i,j}(a,t)$ も $\overline{B_r(0)} \times [-\epsilon,\epsilon]$ 上の C^1 級関数になる．したがって $x(a,t)$ は C^2 級関数になる．さらに $\frac{\partial g_{i,j}}{\partial a_k}(a,t)$ が満たす微分方程式を解析することで $\frac{\partial g_{i,j}}{\partial a_k}(a,t)$ が C^1 級になることが分かり，従って $g_{i,j}$ は C^2 級，$x(a,t)$ は C^3 級となる．これを繰り返して $x(a,t)$ が C^∞ 級になることが分かる．

問題 109 (1) 常微分方程式の解が局所的に一意に存在し，また初期値に滑らかに依存すること (問題 108) から，次が言える．M の任意の点 p に対して p の開近傍 U_p と $\epsilon > 0$ が存在して $\Phi|_{U_p\times(-\epsilon,\epsilon)}\colon U_p \times (-\epsilon,\epsilon) \to M$ は C^∞ 級である．

$K = \Phi(\{x_0\} \times [0,t_0])$ の各点ごとに上の主張を適用すると，K は U_p, $p \in K$ で覆われる．$\Phi|_{\{x_0\}\times\mathbb{R}}$ は積分曲線であり，特に連続写像である．従ってこの写像による有界閉区間の像である K はコンパクト．従って K は有限個の $U_{p_1},\ldots,U_{p_N}$ により覆われる．このとき $\epsilon_i > 0$ が存在して，$\Phi|_{U_{p_i}\times(-\epsilon_i,\epsilon_i)}$ は C^∞ 級である．$\epsilon = \min(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_N)$, $V = U_{p_1} \cup \cdots \cup U_{p_N}$ とおくとき，$\Phi|_{V\times(-\epsilon,\epsilon)}$ は C^∞ 級である．

(2) (1) より，$\varphi_{t_0/N}$ は K の開近傍 V 上で C^∞ 級である．$\varphi_{t_0/N}^{\circ k} = \overbrace{\varphi_{t_0/N} \circ \cdots \circ \varphi_{t_0/N}}^{k\text{ 回}} = \varphi_{kt_0/N}$，$1 \leq k \leq N$ が x_0 の近傍で C^∞ 級であることを k についての帰納法で示そう．$k = 1$ のときは明らかである．$k < N$ について $\varphi_{t_0/N}^{\circ k}$ が x_0 の開近傍 $W \subset V$ で C^∞ 級であることが示されたとする．$\varphi_{t_0/N}^{\circ k}(x_0) = \varphi_{kt_0/N}(x_0) \in K$ であり，V は K の開近傍であるから，$\varphi_{t_0/N}^{\circ k}(W') \subset V$ を満たす x_0 の開近傍 $W' \subset W$ が存在する．このとき $\varphi_{t_0/N}^{\circ(k+1)} = \varphi_{t_0/N} \circ \varphi_{t_0/N}^{\circ k}$ は W' 上で C^∞ 級である．帰納法より $\varphi_{t_0/N}^{\circ N} = \varphi_{t_0}$ は x_0 のある開近傍で C^∞ 級であることが分かった．

(3) $\Phi(x,t_0+t) = \varphi_{t+t_0}(x) = \varphi_t(\varphi_{t_0}(x)) = \Phi(\varphi_{t_0}(x),t)$ である．φ_{t_0} は x_0 のある開近傍 W で C^∞ 級である．また $\varphi_{t_0}(x_0)$ のある開近傍 U と $\epsilon > 0$ が存在して $\Phi(x,t)$ は $(x,t) \in U \times (-\epsilon,\epsilon)$ で C^∞ 級である．ここで x_0 の開近傍 $W' \subset W$ で $\varphi_{t_0}(W') \subset U$ となるものが存在する．このとき $\Phi(x,t_0+t) = \Phi(\varphi_{t_0}(x),t)$ は $(x,t) \in W' \times (-\epsilon,\epsilon)$ で C^∞ 級になる．これは $\Phi(x,t)$ が $W' \times (t_0-\epsilon,t_0+\epsilon)$ 上で C^∞ 級であることを示す．