幾何学 I　演習問題 No.8 略解

問題 86　(1) 例えば $(-1,0,\dots,0)$ の開近傍として $U=\{(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_1<0, x_2^2+\cdots+x_n^2<1\}$ をとり，その上の座標を

$$(y_1,\dots,y_n)=\varphi(x_1,\dots,x_n)=\left(x_2,\dots,x_n,x_1+\sqrt{1-x_2^2-\cdots-x_n^2}\right)$$

とおくとよい．

(2) $x_1^2+\cdots+x_n^2=1$ を満たす点 $p=(x_1,\dots,x_n)$ に対して，$d_pf=(2x_1,\dots,2x_n)\neq 0$ であるから．

問題 87 このように定義した $\tilde{f}$ が $\tilde{f}|_V=f|_V$ を満たすことは明らかである．$\tilde{f}$ が C^∞ 級であることを示せばよい．$\mathrm{Supp}(\rho)\subset U$ より，$M=U\cup(M\setminus\mathrm{Supp}(\rho))$ は M の開被覆を与える．$\tilde{f}$ が U および $M\setminus\mathrm{Supp}(\rho)$ の上で C^∞ 級であることを示せばよい．U 上では ρf に等しいので C^∞ 級である．$M\setminus\mathrm{Supp}(\rho)$ 上では恒等的に 0 なのでやはり C^∞ 級である．

問題 88 簡単な計算で $[X,Y]=0$ である．極座標 (r,θ) をとる．($r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\theta=\tan^{-1}(y/x)$)．このとき

$$X=r\frac{\partial}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial\log r},\qquad Y=\frac{\partial}{\partial\theta}$$

と書けることから交換することが説明できる．(一般に，n 次元多様体上の互いに交換するベクトル場 $X_1,\dots,X_n$ はある局所座標 $(y_1,\dots,y_n)$ を用いて $X_i=\frac{\partial}{\partial y_i}$ の形に書ける．)

問題 89 前に示したことから，p の座標近傍 $(U;x_1,\dots,x_m)$ および q の座標近傍 $(V;y_1,\dots,y_n)$ が存在して $f(U)\subset V$, $x_i(p)=y_j(q)=0$, f の座標表示は $(x_1,\dots,x_m)\mapsto(y_1,\dots,y_n)=(x_1,\dots,x_n)$ で与えられる $(n\le m)$．このとき $(U\cap f^{-1}(q);x_{n+1},\dots,x_m)$ は $f^{-1}(q)$ の座標近傍を与え，包含写像 $\iota\colon f^{-1}(q)\to M$ に対して $d_p\iota(\frac{\partial}{\partial x_j})_p=(\frac{\partial}{\partial x_j})_p$, $j=n+1,\dots,m$ である．したがって $T_pf^{-1}(q)$ を T_pM の部分空間とみなしたとき，

$$T_pf^{-1}(q)=\left\langle\left(\frac{\partial}{\partial x_{n+1}}\right)_p,\dots,\left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p\right\rangle$$

である ($\langle\cdots\rangle$ は $\mathbb{R}$ 上生成する部分空間を表す．)．一方

$$d_pf\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right)=\begin{cases}\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_q & 1\le i\le n\\ 0 & n+1\le i\le m\end{cases}$$

したがって $T_pf^{-1}(q)=\mathrm{Ker}(d_pf)$ である．

採点基準　2 点．正しく議論していれば 2 点．そうでなければ 0 点．上の解答以外にも，$f\circ\iota=q$ であることから $d_pf\circ d_p\iota=0$，すなわち $\mathrm{Im}\,d_p\iota\subset\mathrm{Ker}\,d_pf$ を得るが，次元を比較して $\mathrm{Im}\,d_p\iota=\mathrm{Ker}\,d_pf$ を結論するという解答も OK.

問題 90 (1) のコンパクト以外は授業で説明した．コンパクト性は $A\in O(n,\mathbb{R})$ の各列ベクトルが長さ 1 のベクトルであり，従って $O(n,\mathbb{R})$ は $M_n(\mathbb{R})\cong\mathbb{R}^{n^2}$ の部分集合として有界閉集合であることから．

問題 91 $O(n,\mathbb{R})$ は $(M_n(\mathbb{R})$ の開部分集合である$)GL_n(\mathbb{R})$ の部分多様体でもある．$GL_n(\mathbb{R})$ に対しては積および逆元をとる写像は滑らか (C^∞ 級)．このことと，部分多様体の定義から，$O(n,\mathbb{R})$ の積と逆元をとる写像がなめらかであることが分かる．詳細略.

問題 92 次の写像 F を考える．

$$F\colon M_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{Herm}(n), \qquad F(A) = {}^t\overline{A}A$$

ここで $\mathrm{Herm}(n)$ は n 次複素正方行列 A で ${}^t\overline{A} = A$ を満たすもの全体 (エルミート行列全体) の集合で，これは実 n^2 次元のベクトル空間である．F が $\mathrm{Herm}(n)$ に値をとる C^∞ 級写像であることは明らかである．$U(n) = F^{-1}(E_n)$ であるから，E_n が F の正則値であることを示せば十分である．まず F の $A \in M_n(\mathbb{C})$ での微分を計算する．

$$d_AF(X) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{F(A+\epsilon X) - F(A)}{\epsilon} = {}^t\overline{A}X + {}^t\overline{X}A$$

d_AF が $A \in U(n)$ で全射になることを示したい．任意の $B \in \mathrm{Herm}_n$ に対して $X = \frac{1}{2}{}^t\overline{A}^{-1}B$ とおくとき，

$$ {}^t\overline{A}X + {}^t\overline{X}A = \frac{1}{2}{}^t\overline{A}{}^t\overline{A}^{-1}B + \frac{1}{2}{}^t\overline{B}A^{-1}A = \frac{1}{2}(B + {}^t\overline{B}) = B.$$

である．したがって E_n は F の正則値であり，$U(n) = F^{-1}(E_n)$ は $M_n(\mathbb{C})$ の (n^2 次元の) 部分多様体である．

E_n での接空間は $T_{E_n}M_n(\mathbb{C}) = M_n(\mathbb{C})$ の部分空間として

$$\mathfrak{u}(n) = \mathrm{Ker}(d_{E_n}F\colon M_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{Herm}_n) = \{X \in M_n(\mathbb{C})\colon {}^t\overline{X} + X = 0\}$$

で与えられる．すなわち歪エルミート行列全体のなす空間である．X_1, X_2 を歪エルミート行列とするとき，

$$ {}^t\overline{[X_1,X_2]} = {}^t(\overline{X}_1\overline{X}_2 - \overline{X}_2\overline{X}_1) = {}^t\overline{X}_2{}^t\overline{X}_1 - {}^t\overline{X}_1{}^t\overline{X}_2 = X_2X_1 - X_1X_2 = -[X_1,X_2]$$

ゆえ $[X_1,X_2]$ も歪エルミート．すなわち，$\mathfrak{u}(n)$ は括弧積で閉じている．

採点基準　2 点．部分多様体であることが 1 点で，リー環 $\mathfrak{u}(n)$ を正しく求めて 1 点．(括弧積で閉じているところは採点対象外．) 部分多様体であることの議論は正しければ何でもよいが，もし正則値の逆像が部分多様体になるという定理を使っている場合は，微分が正しく計算できているか，また dF が全射であることが示せているか，を見る．(F の行先を $M_n(\mathbb{C})$ にしていると当然全射にならない．) リー環は $\mathfrak{u}(n) = \mathrm{Ker}\, d_{E_n}F$ であることを使って正しい表示を与えていれば OK とする．(それ以外の解答も正しければもちろん OK だが個別に判断する．)

問題 93 (松本幸夫, p.231-232) の計算を参照のこと．

問題 94 (1) $[[X,Y],Z]f = [X,Y]Zf - Z[X,Y]f = (XY-YX)Zf - Z(XY-YX)f$ などと定義に従って展開すると，全ての項が消しあうことが分かる．詳細略.

(2) $[X,fY]g = XfYg - fYXg = X(f)\cdot Y(g) + f(XY(g)) - f(YX(g)) = (X(f)Y + f[X,Y])(g)$.

問題 95 無限遠点の周りでの座標を $u + \sqrt{-1}v = z^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} + \sqrt{-1}\frac{-y}{x^2+y^2}$ とおくとき，$\frac{\partial}{\partial x} = -(u^2-v^2)\frac{\partial}{\partial u} - 2uv\frac{\partial}{\partial v}$, $\frac{\partial}{\partial y} = 2uv\frac{\partial}{\partial u} - (u^2-v^2)\frac{\partial}{\partial v}$．これらは無限遠点 $u=v=0$ の周りでの C^∞ 級ベクトル場に拡張される．よって $X = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$ は $\widehat{\mathbb{C}}$ 上の C^∞ 級ベクトル場に拡張される．

問題 96 (1) X の点 (x,i) の同値類を $[x,i]\in Y$ と書くことにする．$[0,0]$ と $[0,1]$ を分離する開集合が存在しないことを示そう．$[0,0]\in V_0$, $[0,1]\in V_1$，V_0, V_1 は Y の開集合とする．また $\pi\colon X\to Y$ を自然な射影とする．$\pi^{-1}V_0$ は $(0,0)$ を含む開集合であるから，ある $\epsilon>0$ が存在して $(-\epsilon,\epsilon)\times\{0\}\subset\pi^{-1}V_0$．同様にある $\epsilon'>0$ が存在して $(-\epsilon',\epsilon')\times\{1\}\subset\pi^{-1}V_1$．ここで $\delta=\min(\epsilon/2,\epsilon'/2)$ とおくと，$(\delta,0)\in\pi^{-1}V_0$ かつ $(\delta,1)\in\pi^{-1}V_1$．$\pi^{-1}V_1$ は同値関係 $\sim$ で閉じているから $(\delta,1)\sim(\delta,0)\in\pi^{-1}V_1$ でもある．したがって $\pi^{-1}V_0\cap\pi^{-1}V_1\neq\emptyset$．すなわち $V_0\cap V_1\neq\emptyset$.

(2) $\pi^{-1}U_0=X\setminus\{(0,1)\}=X\cap(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,1)\})$ は X の (相対位相に関する) 開集合であるから U_0 は Y の開集合．U_1 も同様.

(3) まず π_i が同相写像であることを示す．$\pi_i\colon\mathbb{R}\times\{i\}\to U_i$ は $\mathbb{R}\times\{i\}\hookrightarrow X\xrightarrow{\pi}Y$ (連続写像の合成より連続) から誘導される写像であるから連続である．π_i が全単射であることは明らかなので，π_i が開写像であることを示せばよい．$V\subset\mathbb{R}\times\{i\}$ を開集合とする．($\mathbb{R}\times\{i\}$ は X の開集合なので V は X の開集合である．) $\phi\colon X\to X$ を $\phi(x,i)=(x,1-i)$ で定義される同相写像とすると，$\pi^{-1}(\pi_i(V))=V\cup\phi(V\setminus\{(0,i)\})$ が成り立ち，これは X の開集合．よって $\pi_i(V)$ は Y の開集合.

次に $\varphi_0=\pi_0^{-1}$, $\varphi_1=\pi_1^{-1}$ の間の座標変換を見る．$\varphi_0\circ\varphi_1^{-1}\colon\varphi_1(U_0\cap U_1)\to\varphi_0(U_0\cap U_1)$ は $\mathbb{R}\setminus\{0\}=\varphi_1(U_0\cap U_1)=\varphi_0(U_0\cap U_1)$ の恒等写像であり，C^∞ 級.

(4) 1 の分割 $\{\rho_0,\rho_1\}$ が存在するとする．$\operatorname{Supp}\rho_0\subset U_0$, $\rho_0+\rho_1=1$ より $\rho_1([0,1])=1$ である．同様に $\rho_0([0,0])=1$ である．一方で $x_n=[\frac{1}{n},0]=[\frac{1}{n},1]$ とおくとき $1=\rho_0(x_n)+\rho_1(x_n)$. U_i 内で点列 x_n は $[0,i]$ に収束するので $1=\lim_{n\to\infty}(\rho_0(x_n)+\rho_1(x_n))=\rho_0([0,0])+\rho_1([0,1])=2$．これは矛盾である．よって $\{U_0,U_1\}$ に従属する 1 の分割は存在しない.