幾何学 I　演習問題 No.7 略解

問題 71 教科書 [松本幸夫] 補題 13.10 とその周辺の説明を参照せよ．

問題 72 φ^{-1} は同相写像で $\overline{B_\epsilon}$ はコンパクトだからその像 $\varphi^{-1}(\overline{B_\epsilon})$ はコンパクト．M はハウスドルフなので $\varphi^{-1}(\overline{B_\epsilon})$ は閉集合である．$\varphi^{-1}(\overline{B_\epsilon})$ は $\varphi^{-1}(B_\epsilon)$ を含む閉集合だから $\overline{\varphi^{-1}(B_\epsilon)} \subset \varphi^{-1}(\overline{B_\epsilon})$. 一方の包含関係は示された．

逆に $\varphi^{-1}(\overline{B_\epsilon}) \subset \overline{\varphi^{-1}(B_\epsilon)}$ を示す．任意の点 $x \in \overline{B_\epsilon}$ に対して点列 $x_n \in B_\epsilon$ であって $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ となるものがとれる．φ^{-1} は $\overline{B_\epsilon}$ を含む開集合 U' 上で連続であるから，$\varphi^{-1}(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi^{-1}(x_n)$ である．ここで $\varphi^{-1}(x_n) \in \varphi^{-1}(B_\epsilon)$ より $\varphi^{-1}(x) \in \overline{\varphi^{-1}(B_\epsilon)}$. 従って逆の包含関係 $\varphi^{-1}(\overline{B_\epsilon}) \subset \overline{\varphi^{-1}(B_\epsilon)}$ が示された．

問題 73 集合 A の閉包 $\overline{A}$ とは A を含む最小の閉集合であったことを思い出そう．$U_1 \cup \cdots \cup U_N \subset \overline{U_1} \cup \cdots \cup \overline{U_N}$ であって $\overline{U_1} \cup \cdots \cup \overline{U_N}$ は閉集合の有限和なので閉集合である．したがって $\overline{U_1 \cup \cdots \cup U_N} \subset \overline{U_1} \cup \cdots \cup \overline{U_N}$. 逆に $U_i \subset \overline{U_1 \cup \cdots \cup U_N}$ であるから $\overline{U_i} \subset \overline{U_1 \cup \cdots \cup U_N}$. したがって $\overline{U_1} \cup \cdots \cup \overline{U_N} \subset \overline{U_1 \cup \cdots \cup U_N}$. 以上より $\overline{U_1} \cup \cdots \cup \overline{U_N} = \overline{U_1 \cup \cdots \cup U_N}$

問題 74 (a) $\Rightarrow$ (b) : M の各点 x は $\mathbb{R}^n$ の開球体と同相な近傍 $U(x)$ を持つ．$M = \bigcup_{i=1}^\infty K_i$, K_i はコンパクト，のとき，各 K_i は有限個の $U(x)$ で覆われる．これらの近傍を全てあわせて，M は可算個の開球体と同相な集合で覆われる．$\mathbb{R}^n$ の開球体は第二可算公理を満たす．（有理点を中心とする半径 $1/n$ の開球体たちが開基となる．）第二可算公理を満たす位相空間の可算和はやはり第二可算公理を満たす．

(b) $\Rightarrow$ (a) : $\{U_i\}_{i=1}^\infty$ を可算開基とする．開基の元 U_i のうち，あるコンパクト集合に含まれるものを全て集めてできる集合族を $\mathcal{U}$ とする．$\mathcal{U}$ が M の開被覆を与えることを示そう．任意の点 $x \in M$ はコンパクトな近傍 K を持つ．このとき開基の性質から，ある U_i が存在して $x \in U_i \subset K$ となる．ここで $U_i \in \mathcal{U}$ である．したがって $\mathcal{U}$ は M の開被覆である．$\mathcal{U} = \{V_j\}_{j=1}^\infty$ とすると，V_j を含むコンパクト集合 K_j が存在する．このとき $M = \bigcup_{j=1}^\infty K_j$.

問題 75 (松本幸夫，補題 14.9 参照)　包含関係 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \overline{G_\lambda} \subset \overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda}$ は問題 73 と同様に出来る．逆向きの包含関係を示す．$x \in \overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda}$ とする．局所有限の定義から x の開近傍 V が存在して $V \cap G_\lambda \neq \emptyset$ となる λ は有限個である．それらを $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ とする．もし $x \notin \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \overline{G_\lambda}$ であるならば各 $i \in \{1, \ldots, n\}$ について $x \notin \overline{G_{\lambda_i}}$ であるから，x の開近傍 V_i であって $V_i \cap G_{\lambda_i} = \emptyset$ となるものが存在する．$U = V \cap V_1 \cap \cdots \cap V_n$ とおくとき，U は x の開近傍であって任意の $\lambda \in \Lambda$ について $U \cap G_\lambda = \emptyset$.（実際 λ が $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ のどれでもなければ $U \cap G_\lambda \subset V \cap G_\lambda = \emptyset$ であるし，$\lambda = \lambda_i$ ならば $U \cap G_{\lambda_i} \subset V_i \cap G_{\lambda_i} = \emptyset$ である．）したがって $U \cap \bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda = \emptyset$. これは $x \in \overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda}$ に反する．よって $x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \overline{G_\lambda}$.

問題 76 $U_1 = M \setminus F_2$, $U_2 = M \setminus F_1$ とする．$F_1 \cap F_2 = \emptyset$ より U_1, U_2 は M の開被覆である．U_1, U_2 に対応する 1 の分割 ρ_1, ρ_2 を考えると，$\mathrm{Supp}(\rho_i) \subset U_i$ ゆえ，$\rho_1|_{F_2} = 0$ かつ $\rho_2|_{F_1} = 0$. $\rho_1 + \rho_2 = 1$ より $\rho_1|_{F_1} = 1$. よって $f = \rho_1$ は条件を満たす．

問題 77 M の次元を m，N の次元を n とする．N は部分多様体であるから，N の任意の点 p に対してそれを含む M のチャート $(U_p; x_1, \ldots, x_m)$ であって，$U_p \cap N = \{x_{n+1} = \cdots = x_m = 0\}$ となるものが存在する．M は $\{U_p\}_{p\in N}$ および開集合 $M \setminus N$ によって覆われる．この開被覆に付随する 1 の分割を $\{\rho_p\}_{p\in N} \cup \{\tau\}$ とする．ここで

- $\mathrm{Supp}\,\rho_p \subset U_p$, $\mathrm{Supp}\,\tau \subset M \setminus N$,
- $0 \leq \rho_p(x) \leq 1$, $0 \leq \tau(x) \leq 1$,
- $\{\mathrm{Supp}\,\rho_p\} \cup \{\mathrm{Supp}\,\tau\}$ は局所有限,

- $\sum_{p \in N} \rho_p(x) + \tau(x) = 1$

が成立している．チャート U_p 上での f の拡張 f_p を座標を使って次のように定義する．

$$f_p(x_1, \ldots, x_m) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

f_p は明らかに U_p 上の C^∞ 級関数である．次に M 上の関数 $\tilde{f}_p$ を

$$\tilde{f}_p(x) = \begin{cases} \rho_p(x) f_p(x) & x \in U_p \\ 0 & x \notin U_p \end{cases}$$

と定める．$\tilde{f}_p$ は C^∞ 級関数である．実際，$M = U_p \cup (M \setminus \operatorname{Supp} \rho_p)$ は開被覆であるが，$\tilde{f}_p|_{U_p} = \rho_p f_p$ および $\tilde{f}_p|_{M \setminus \operatorname{Supp} \rho_p} = 0$ は各々C^∞ 級であるからである．最後に f の拡張を

$$\tilde{f} = \sum_{p \in N} \tilde{f}_p$$

とおく．$\operatorname{Supp} \tilde{f}_p = \operatorname{Supp} \rho_p$ は局所有限であるから，$\tilde{f}$ は C^∞ 級関数である．また $x \in N$ に対して $\tau(x) = 0$ より $\sum_{p \in N} \rho_p(x) = 1$．従って，

$$\tilde{f}(x) = \sum_{p \in N} \tilde{f}_p(x) = \sum_{p \in N : x \in U_p} \tilde{f}_p(x) = \sum_{p \in N : x \in U_p} \rho_p(x) f(x) = \left(\sum_{p \in N} \rho_p(x) \right) f(x) = f(x).$$

すなわち $\tilde{f}(x)$ は f の拡張になっている．

$\boxed{\text{採点基準}}$ 2 点．部分多様体の定義を使って f の局所的な拡張 f_α を与え，それを 1 の分割により $\sum_\alpha \rho_\alpha f_\alpha$ の形に張り合わせているかどうかを見る．議論の大筋が間違っているものは 0 点．議論の大筋は似ていても N が閉であるという条件を使っていないものは 1 点減点する．(上の解答では $M \setminus N$ が開集合というところで使っている．) 議論の細かい部分，例えば局所的拡張やそれに cut-off 関数 ρ_α をかけた関数の滑らかさに関する議論，和 $\sum_\alpha \rho_\alpha f_\alpha$ が局所有限ゆえ滑らかになること等については，不十分でも (基本的には) 減点しない．

授業では，1 の分割の存在定理の別のバージョンも紹介した．$\{U_\alpha\}$ を開被覆とするとき，高々可算個の 1 の分割 $\{\rho_j\}_{j=1}^\infty$ であって $\{\operatorname{Supp} \rho_j\}$ は $\{U_\alpha\}$ の局所有限な細分であり，$\sum_j \rho_j(x) = 1$, $0 \leq \rho_j(x) \leq 1$ が成り立つものが存在する．このバージョンに基づいた解答でももちろん (正しく議論していれば) 正解である．

問題 78 略

問題 79 局所座標を使って $\pi \colon S^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n$ を座標表示する．S^{2n+1} の局所座標

$$U = \{(x_1, \ldots, x_{2n+2}) \in \mathbb{R}^{2n+2} : x_{2n+2} > 0\}, \quad \varphi(x_1, \ldots, x_{2n+2}) = (x_1, \ldots, x_{2n+1})$$

を考える．ただし $\mathbb{R}^{2n+2}$ の点 $(x_1, \ldots, x_{2n+2})$ を $\mathbb{C}^{n+1}$ の点 $(x_1 + ix_2, \ldots, x_{2n+1} + ix_{2n+2})$ と同一視することにする．$\pi(U)$ は $\mathbb{CP}^n$ の座標近傍

$$V = \{[z_0, \ldots, z_n] : z_n \neq 0\}, \quad \psi([z_0, \ldots, z_n]) = \left(\frac{z_0}{z_n}, \ldots, \frac{z_{n-1}}{z_n} \right)$$

に含まれるので，合成 $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ を考えると，

$$\begin{aligned} \psi \circ \pi \circ \varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_{2n+1}) &= \psi \circ \pi \left(x_1, \ldots, x_{2n+1}, \sqrt{1 - x_1^2 - \cdots - x_{2n+1}^2} \right) \\ &= \left(\frac{x_1 + ix_2}{x_{2n+1} + i\sqrt{1 - x_1^2 - \cdots - x_{2n+1}^2}}, \ldots, \frac{x_{2n-1} + ix_{2n}}{x_{2n+1} + i\sqrt{1 - x_1^2 - \cdots - x_{2n+1}^2}} \right) \end{aligned}$$

となるが各成分は全て $\{(x_1,\dots,x_{2n+1}) : x_1^2+\cdots x_{2n+1}^2<1\}$ 上の C^∞ 級関数．他の座標近傍上でも同様であり，したがって π は C^∞ 級である．

次に π が沈めこみであることを示す．U の点 $p=(a_1,\dots,a_{2n+2})$ をとる．$\epsilon=a_{2n+1}+ia_{2n+2}$ とおく．$\pi(U)$ 上で π の次のような section s が取れる．(ただし section(切断) とは写像 $s\colon\pi(U)\to U$ であって $\pi\circ s=\mathrm{id}_{\pi(U)}$ を満たすもののことを言う．) 写像 $s\colon\pi(U)\to U$ を

$$s([z_0,\dots,z_n])=\frac{\epsilon}{|\epsilon|\sqrt{|\frac{z_0}{z_n}|^2+\cdots+|\frac{z_{n-1}}{z_n}|^2+1}}\left(\frac{z_0}{z_n},\dots,\frac{z_{n-1}}{z_n},1\right)$$

で定めると s の座標表示は

$$(w_1,\dots,w_n)\longmapsto\frac{1}{|\epsilon|\sqrt{|w_1|^2+\cdots+|w_n|^2+1}}(\epsilon w_1,\dots,\epsilon w_n,a_{n+1})$$

であるから s は C^∞ 級写像である．また s は

$$\pi\circ s=\mathrm{id}_{\pi(U)},\quad s(\pi(p))=p$$

を満たす．従って

$$d_p\pi\circ d_{\pi(p)}s=\mathrm{id}$$

となり $d_p\pi$ は全射である．section s は座標近傍 U や点 p ごとに異なるが，S^{2n+1} の各々の座標近傍で π の section が取れることがわかるので，π は全ての点で沈めこみである．

問題 80 臨界点は $[1,0,\dots,0],[0,1,0,\dots,0],\dots[0,\dots,0,1]$ の $n+1$ 点．

問題 81 $[x,y,z]$ と等しい点を与える S^2 の点は (x,y,z) と $(-x,-y,-z)$ のみであることから，f が well-defined であることが分かる．

まず，f が C^∞ 級であることを示そう．$\mathbb{RP}^2$ の局所座標を $(U_i,\varphi_i), U_i=\{[x_1,x_2,x_3]:x_i\neq 0\}$，$\varphi_i([x_1,x_2,x_3])=(\frac{x_j}{x_i})_{j\neq i}$ とおく．例えば U_1 上での座標表示は $\varphi_1^{-1}(y,z)=[1,y,z]=[\frac{1}{\sqrt{1+y^2+z^2}}(1,y,z)]$, $\frac{1}{\sqrt{1+y^2+z^2}}(1,y,z)\in S^2$ なので，

$$f\circ\varphi_1^{-1}(y,z)=\frac{1}{1+y^2+z^2}(1,y^2,z^2,y,yz,z)$$

で与えられる．従って f は U_1 上で C^∞ 級．他のチャートの上でも同様に C^∞ 級であることが示される．

次に f が埋め込みであることを示そう．$\mathbb{RP}^2$ はコンパクトであるから，単射はめ込みであることを示せば十分である．

単射性：$(x,y,z),(x',y',z')\in S^2$ で $f([x,y,z])=f([x',y',z'])$ とすると，

$$x^2=x'^2,\ y^2=y'^2,\ z^2=z'^2,\ xy=x'y',\ yz=y'z',\ z'x'=zx$$

である．もし $x\neq 0$ であれば，第 1 の式から $x'=\epsilon x$ $(\epsilon\in\{\pm1\})$ である．また $xy=x'y'$, $xz=x'z'$ から $y'=\epsilon y,\ z'=\epsilon z$ が従う．従って $[x',y',z']=[\epsilon x,\epsilon y,\epsilon z]=[x,y,z]$ である．$y\neq 0$ の場合，$z\neq 0$ の場合も同様にして $[x',y',z']=[x,y,z]$ が示される．

はめ込みであること　U_1 における座標表示の Jacobi 行列は

$$J(f\circ\varphi_1^{-1})=\frac{1}{(1+y^2+z^2)^2}\begin{pmatrix}-2y & -2z\\ 2y(1+z^2) & -2y^2z\\ -2yz^2 & 2z(1+y^2)\\ 1-y^2+z^2 & -2yz\\ z(1-y^2+z^2) & y(1+y^2-z^2)\\ -2yz & 1+y^2-z^2\end{pmatrix}$$

この行列のランクは 2 である．実際，1 行目と 2 行目からなる部分行列の行列式は $(1+y^2+z^2)^{-3}4yz$ であるが，これがゼロでなければランクは 2．もしゼロであれば，$y=0$ または $z=0$ である．$y=0$ のとき，Jacobi 行列は

$$\frac{1}{(1+z^2)^2}\begin{pmatrix} 0 & -2z \\ 0 & 0 \\ 0 & 2z \\ 1+z^2 & 0 \\ z(1+z^2) & 0 \\ 0 & 1-z^2 \end{pmatrix}$$

となる．3 行目と 4 行目からなる部分行列の行列式は $-(1+z^2)^{-3}2z$ であり，これがゼロでなければランクは 2．もしゼロであれば $z=0$ である．この時にランクが 2 であることは容易に確かめられる．$y \neq 0$, $z=0$ のときも同様である．従って Jacobi 行列は単射線形写像を表す．従って U_1 上ではめ込み．U_2, U_3 上ではめ込みになっていることも同様.

$\boxed{\text{採点基準}}$ 2 点．f が C^∞ 級であることを示して 1 点，また f が埋め込みであることを示して 1 点．C^∞ 級であることについては，一つのチャートで示していれば十分とみなす．埋め込みであることは，定義 (はめ込みで像との同相である) に基づいて正しく示しているか，あるいは $\mathbb{RP}^2$ がコンパクトであることに言及し，単射はめ込みであることを示しているかを見る．はめ込みについては，1 つのチャートで微分をおおよそ正しく計算して(細かい計算違いは減点しない) 単射線形写像であることが主張されていれば可．単射性は主張されていれば認めることにし，計算間違い等は減点しない．($\mathbb{R}^3$ 上での写像 $(x,y,z) \mapsto (x^2, y^2, z^2, xy, yz, zx)$ の微分を計算し，その Kernel と T_pS^2 との交わりを求める方法，あるいはこの写像 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^6$ が原点以外ではめ込みになっていることを示す方法も考えられるが，その場合は注意深い議論が必要．つまり，写像 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^6$ と写像 $\mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}^6$ の微分の間の関係を明らかにする必要がある．)

問題 85 このサイトの議論を見よ．