幾何学 I　演習問題 No.6 略解

問題 58 f^{-1} が連続であることを言えば良い．このためには X の閉集合 F に対して $f(F)$ が Y の閉集合であることを示せばよい．X はコンパクトなので，その任意の閉部分集合 F はコンパクトである．f は連続なので，コンパクト集合 F の像 $f(F)$ はコンパクトである．ハウスドルフ空間のコンパクト部分集合は閉であるから，$f(F)$ は閉集合である．

問題 59 f のヤコビ行列は

$$Jf = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$$

であり，Jf が全射でないのは $\det Jf = 0 \iff x = 0$ である．したがって臨界点の集合は y 軸 $\{(0, y)\}$ である．また臨界値の集合はこの像であって 1 点集合 $\{(0,0)\}$．f の像は $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\} \cup \{(0,0)\}$．

問題 60 $\pi \colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{RP}^n$ を自然な射影，$\tilde{U}_i = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \neq 0\} = \pi^{-1}(U_i)$ とおく．$\tilde{U}_i$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の開集合である．写像 $\tilde{\varphi}_i \colon \tilde{U}_i \to \mathbb{R}^n$ を $\tilde{\varphi}_i(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{x_i})$ によって定めると，これは連続．与えられた座標 φ_i は $\varphi_i \circ \pi = \tilde{\varphi}_i$ を満たす．したがって $\mathbb{R}^n$ の開集合 U に対して，$\pi^{-1}(\varphi_i^{-1}(U)) = (\varphi_i \circ \pi)^{-1}(U) = \tilde{\varphi}_i^{-1}(U)$ は開集合．商位相の定義から $\varphi_i^{-1}(U)$ は開集合である．つまり φ_i は連続である．(問題 7 と比較せよ．)

問題 61　(1) f ははめ込みであり，埋め込みである．

はめ込みであること：f の微分は

$$f'(t) = \left(\frac{4t}{(t^2+1)^2}, \frac{2(t^2-1)}{(t^2+1)^2} \right)$$

であり，$f'(t) = 0$ となることはないから．

埋め込みであること：f は $\mathbb{R}$ と $R = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\} \setminus \{(1,0)\}$ の間の同相写像を与えることを示そう．$f(\mathbb{R}) \subset R$ は明らかである．写像 $\phi \colon R \to \mathbb{R}$ を

$$\phi(x,y) = \frac{y}{x-1}$$

と定めると，ϕ は明らかに連続．また $f \circ \phi = \mathrm{id}_R$, $\phi \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ であることが確かめられる．よって f の像は R であり，f は像との間の同相写像となる．

(2) はめ込みであるが，埋め込みではない．

はめ込みであること：g のヤコビ行列は

$$Jg = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \\ y & x \end{pmatrix}$$

であり，この 2×2 小行列式

$$\begin{vmatrix} 2x & 0 \\ y & x \end{vmatrix} = 2x^2 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 2y \\ y & x \end{vmatrix} = -2y^2$$

のいずれかはゼロではない．したがって Jg の階数は 2 である．

埋め込みでないこと：g は $g(x,y) = g(-x,-y)$ を満たし，単射ではないから．

(3) はめ込みであるが，埋め込みではない．

はめ込みであること：$h'(t) = (-2t, 1-3t^2)$ はゼロになることはないから．

埋め込みでないこと：h は単射であることは容易に確かめられる．しかし h は埋め込みではない．実際，

$$\lim_{n\to\infty} h(1-\tfrac{1}{n}) = (0,0) = h(-1)$$

であるが，$(-\infty, 1)$ における点列 $1-\frac{1}{n}$ は -1 に収束しない．これは h の逆写像が連続でないことを示している．

$\boxed{\text{採点基準}}$ 3 点．(1)-(3) 各々1 点づつ．各問題について，はめ込みか，埋め込みかを正しく判定しており，またその理由を簡単に述べて 1 点．理由の採点基準については以下の通りとする．はめ込みであることの理由については，微分が単射であることを述べているだけで OK とし，議論の詳細は減点しない．(1) が埋め込みであることの証明は（もちろん証明してほしいが）していなくても減点対象としない．(2) が埋め込みでないこと：単射でないという理由が述べられているかどうかを見る．(3) が埋め込みでないこと：逆写像が連続でない理由が正しく述べられているかどうか．(これは証明まで見る．)

問題 62 はめ込み写像の局所座標表示に関する定理から，p の座標近傍 $(U; x_1, \ldots, x_m)$ および $f(p)$ の座標近傍 $(V; y_1, \ldots, y_n)$ が存在して $f(U) \subset V$ であり，f は $(x_1, \ldots, x_m) \mapsto (y_1, \ldots, y_n) = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$ の形に座標表示される．このとき，$f|_U$ は像への同相写像であることを示そう．まず，$f|_U$ は明らかに単射である．$(x_1, \ldots, x_m) = \varphi$, $(y_1, \ldots, y_n) = \psi$ とかく．また $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を最初の m 成分への射影とする．$f|_U\colon U \to f(U)$ の逆写像 $g\colon f(U) \to U$ は合成

$$f(U) \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^m \xrightarrow{\varphi^{-1}} U$$

で与えられる．ここで，$f(U) \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^m$ の像が φ^{-1} の定義域 $\varphi(U)$ に含まれていることを使っている．従って g は連続である．すなわち $f|_U\colon U \to f(U)$ は同相写像であることが示された．

問題 63 はめ込み写像の局所的性質から，任意の点 $p \in L$ に対して L の座標近傍 $(U; x_1, \ldots, x_l)$ および N の座標近傍 $(V; y_1, \ldots, y_n)$ であって次の性質を満たすものが存在する．$x_1(p) = \cdots = x_l(p) = 0$, $y_1(f(p)) = \cdots = y_n(f(p)) = 0$, $f(U) \subset V$, f の座標表示は $(x_1, \ldots, x_l) \mapsto (y_1, \ldots, y_n) = (x_1, \ldots, x_l, 0, \ldots, 0)$ で与えられる．また，$f\colon L \to f(L)$ は $f(L)$ の相対位相に関して同相写像であるから，$f(U)$ は $f(L)$ の相対位相に関する開集合である．即ち，開集合 $W \subset N$ であって $W \cap f(L) = f(U)$ となるものが存在する．さらに $U' = \{(x_1(p'), \ldots, x_l(p')) \mid p' \in U\}$ を U の座標による像とする．U' は $\mathbb{R}^l$ の開集合である．ここで

$$\begin{aligned} \tilde{V} &= \{q \in V \cap W \mid (y_1(q), \ldots, y_l(q)) \in U'\} \\ &= \{q \in V \cap W \mid (y_1(q), \ldots, y_n(q)) \in U' \times \mathbb{R}^{n-l}\} \end{aligned}$$

とおくと $\tilde{V}$ は N の開集合であって，$(\tilde{V}; y_1, \ldots, y_n)$ は N の局所座標を与える．ここで $\tilde{V} \cap f(L) = \{q \in \tilde{V} \mid y_{l+1}(q) = \cdots = y_n(q) = 0\}$ であることを示そう．$q \in \tilde{V} \cap f(L)$ に対して $q \in V \cap W \cap f(L) = V \cap f(U) = f(U)$ より，写像 f の局所表示から $y_{l+1}(q) = \cdots = y_n(q) = 0$ である．逆に $q \in \tilde{V}$ が $y_{l+1}(q) = \cdots = y_n(q) = 0$ を満たすとする．$(y_1(q), \ldots, y_l(q)) \in U'$ であるから，U の点 p' が存在して $(x_1(p'), \ldots, x_l(p')) = (y_1(q), \ldots, y_l(q))$．したがって $(y_1(q), \ldots, y_n(q)) = (x_1(p'), \ldots, x_l(p'), 0, \ldots, 0)$．$f$ の局所表示から $q = f(p')$ であることが分かる．即ち $q \in \tilde{V} \cap f(L)$．以上より $f(L)$ が部分多様体であることが示された．(注意：教科書 [松本] の定理 12.4 の証明には少し穴があり，N の座標近傍として単に $V \cap W$ を考えているが，正しくは上のようにとるべきである．)

$\boxed{\text{採点基準}}$ 2 点．はめ込みの局所座標表示に関する定理を正しく使えているか，また $L \to f(L)$ が ($f(L)$ の相対位相に関して) 同相であることを使っているかを見る．$V \cap W$ を $\tilde{V}$ に取り換える作業については必要だが，もししていなくても減点対象とはしない．基本的には 0 点か 2 点．部分点については個別に判断する．

問題 64 $(U;x_1,\dots,x_n)$ を点 $p\in L$ を含む N の座標近傍であって $U\cap L=\{q\in U\mid x_{l+1}(q)=\cdots=x_n(q)=0\}$ となるものとする．ここで $\varphi=(x_1,\dots,x_n)\colon U\to\mathbb{R}^n$ とおく．座標の定義から $U':=\varphi(U)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である．$V:=U\cap L$ とし，$\psi:=\varphi|_V\colon V\to\mathbb{R}^l\times\{0\}\subset\mathbb{R}^n$ とおく．まず，(V,ψ) が L の座標近傍であることを示す．V は L の相対位相に関する開集合である．また $\psi(V)=U'\cap(\mathbb{R}^l\times\{0\})$ は $\mathbb{R}^l$ の開集合である．($\mathbb{R}^l\times\{0\}$ の $\mathbb{R}^n$ の部分集合としての相対位相は，$\mathbb{R}^l$ の位相と一致するから．) さらに $\psi\colon V\to\psi(V)$ は同相写像 $\varphi\colon U\to U'$ の V への制限であるから，同相である．

次にこれらの座標近傍の間の座標変換が C^∞ 級であることを確かめる．(V_α,ψ_α), (V_β,ψ_β) を L の座標近傍であって，上で記述した方法で N の座標近傍 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$, (U_β,φ_β) の L への制限として得られるものとする．このとき，L の座標変換 $\psi_\beta\circ\psi_\alpha^{-1}\colon\psi_\alpha(V_\alpha\cap V_\beta)\to\psi_\beta(V_\alpha\cap V_\beta)$ は $\mathbb{R}^l$ の開集合から $\mathbb{R}^l$ の開集合への写像であって，N の座標変換 $\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}\colon\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\to\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$（これは $\mathbb{R}^n$ の開集合から $\mathbb{R}^n$ の開集合への C^∞ 級写像）の $\mathbb{R}^l\times\{0\}$ への制限として得られる．したがって $\psi_\beta\circ\psi_\alpha^{-1}$ は C^∞ 級である．

問題 65 開集合 $\{\pm z>0\}$ の上で (x,y) 平面への射影を座標にとると，f の座標表示は xy であり，この臨界点は $x=y=0$ のみ．また開集合 $\{\pm y>0\}$ 上で (x,z) 平面への射影を座標にとると，f の座標表示は $\pm x\sqrt{1-x^2-z^2}$．この臨界点は $x^2+z^2<1$ 内では $(x,z)=(\pm\frac{1}{\sqrt2},0)$ のみである．開集合 $\{\pm x>0\}$ でも同様．以上より臨界点は $(0,0,\pm1)$, $(\pm\frac{1}{\sqrt2},\pm\frac{1}{\sqrt2},0)$ (複合任意) の 6 点．

問題 66 (1) $F\subset M$ が閉であれば，$U_\alpha\cap F$ は U_α の閉集合である．逆に，全ての α について $U_\alpha\cap F$ が U_α の閉集合であったとする．このとき $U_\alpha\setminus F$ は U_α の開集合であり，U_α は開集合であるから M の開集合でもある．ここで,

$$M\setminus F=\bigcup_{\alpha\in A}(U_\alpha\setminus A)$$

に注意すると，$F\setminus F$ は開集合．従って F は M の閉集合である．

(2) M を座標近傍の族 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ であって $f(U_\alpha)$ が N の座標近傍 (V_α,ψ_α) に含まれるものをとる．このとき $f_\alpha=f|_{U_\alpha}$ はユークリッド空間の開集合の間の C^∞ 級写像とみなせる．(1) から $\{p\in U_\alpha:\mathrm{rank}(Jf_\alpha)_p\le r\}$ が U_α の閉集合であることを示せば十分である．この集合は

$$\{p\in U_\alpha: l\ge r+1 \text{ に対して } (Jf_\alpha)_p \text{ の } l \text{ 次小行列式が全てゼロ }\}$$

と書き直せるが，$(Jf_\alpha)_p$ の小行列式は全て U_α 上の連続関数であるから，この集合は閉集合である．

問題 67 (解１):l,m を $\mathbb{R}^{n+1}$ の相異なる１次元部分空間とし，$l=\mathbb{R}(x_1,\dots,x_{n+1})$, $m=\mathbb{R}(y_1,\dots,y_{n+1})$ とする．もし $x_i\neq0$ かつ $y_i\neq0$ となる i が存在したとする．このとき，(U_i,φ_i) を問題60 にあるような $\mathbb{RP}^n$ の座標とすると，仮定より $l,m\in U_i$ である．$\varphi_i\colon U_i\to\mathbb{R}^n$ は同相写像であり，$\mathbb{R}^n$ はハウスドルフであるから，l, m を分離する開集合が存在する．

もし $x_i\neq0$ かつ $y_i\neq0$ となる i が存在しなかったとする．このとき $x_j\neq0$ なる j をとると，$y_j=0$ である．ここで $\varphi_j(l)\in\mathbb{R}^n$ を中心とする半径１の開球体 B をとると，$\varphi_j^{-1}(B)$ は l の開近傍となる．m は U_j に属さないので，特に $\varphi_j^{-1}(\overline{B})\subset U_j$ の補集合に属する．従って $\varphi_j^{-1}(\overline{B})$ が $\mathbb{RP}^n$ の閉集合であることが示されればよい．自然な射影 $\pi\colon\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}\to\mathbb{RP}^n$ に対して，

$$\begin{aligned}\pi^{-1}\varphi_j^{-1}(\overline{B})&=\left\{(z_1,\dots,z_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}: z_j\neq0,\ \sum_{i\neq j}\left|\frac{x_i}{x_j}-\frac{z_i}{z_j}\right|^2\le1\right\}\\&=\left\{(z_1,\dots,z_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}:\sum_{i\neq j}\left|z_j\frac{x_i}{x_j}-z_i\right|^2\le|z_j|^2\right\}\end{aligned}$$

これは $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ の閉集合であるから，主張が示された．

(解２):2 直線の角度のアイデアを使う．l, m を上の通りとすると，l, m のなす角度 θ は $|\cos(\theta)| = \frac{|(x,y)|}{\|x\|\|y\|}$ を満たす．ここで $x = (x_1, \ldots, x_{n+1})$, $y = (y_1, \ldots, y_{n+1})$ であり，(x, y) は $\mathbb{R}^{n+1}$ の標準内積．Cauchy-Schwarz の不等式の等号成立条件を思い出すと，$l = m$ は $|\cos\theta| = \frac{|(x,y)|}{\|x\|\|y\|} = 1$ と同値であることが分かる．ここで $l = \mathbb{R}x$ を固定して関数 $\tilde{f}_l \colon (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \frac{|(x,y)|}{\|x\|\|y\|}$ を考える．$\tilde{f}_l$ は写像 $f_l \colon \mathbb{RP}^n \to \mathbb{R}$ であって $\tilde{f}_l = f_l \circ \pi$ なるものを誘導することは容易に分かる．問題 60（あるいは問題 7）と同じ理由により $\tilde{f}_l$ の連続性から f_l の連続性が従う．$l \neq m$ であるとすると，$f_l(m) < 1$ である．$f_l(m) < c < 1$ なる実数 c をとり，$U = \{k \in \mathbb{RP}^n \mid f_l(k) > c\}$, $V = \{k \in \mathbb{RP}^n \mid f_l(k) < c\}$ とおくと，U, V は l, m を分離する開集合である．