幾何学 I　演習問題 No.5 略解

問題 47　点 p での接空間 T_pM を点 p を通る曲線の同値類と考える見方で示そう．$c\colon(-\epsilon,\epsilon)\to M$ を p を通る ($c(0)=p$)M 上の C^∞ 級曲線とする．d_pf は M の曲線 c の同値類を $f\circ c$ の同値類に写す．さらに $d_{f(p)}g$ は曲線 $f\circ c$ の同値類を $g\circ(f\circ c)=(g\circ f)\circ c$ の同値類に写す．これは曲線 c の同値類の $d_p(g\circ f)$ による像である．

問題 48　$p\in M$ について，$df:T_pM\to T_{f(p)}N$ 及び $d(f^{-1}):T_{f(p)}N\to T_pM$ は互いに逆写像の関係にある線形写像であり，同型である．特に T_pM と $T_{f(p)}N$ の次元は等しく，M と N の次元も等しい．

問題 49

(1) 正しい．φ^{-1} は同相写像であり (特に連続写像なので)，コンパクト集合 A の像 $\varphi^{-1}(A)$ はコンパクト．

(2) との比較のため，もう少し丁寧に論証するならば次の通り．上で示したのは $\varphi^{-1}(A)$ は U の部分位相空間としてコンパクト，ということである．ここで $\varphi^{-1}(A)$ に U からの相対位相を入れたものと $\varphi^{-1}(A)$ に M からの相対位相を入れたものは位相空間として一致する (なぜなら U には M からの相対位相が入っているから)．従って，結局 $\varphi^{-1}(A)$ は M の部分位相空間としてもコンパクトである．

(2) 反例がある．例えば $M=\mathbb{R}$, $U=U'=(0,1)$，$\varphi\colon U\to U'$ を恒等写像，$A=U'$ とする．A は U' 全体であるから U' の閉集合であるが，$\varphi^{-1}(A)=U$ は M の閉集合ではない．他にも，$A=[\frac{1}{2},1)$ としてもよい．

φ は連続なので，当然 $\varphi^{-1}(A)$ は U の閉集合である．U の閉集合だからといって M の閉集合とは限らない，というのがポイント．

注 :「コンパクト集合の連続写像による像はコンパクト」，また,「閉集合の連続写像による逆像は閉集合」という事実とは一見異なるようにみえますが，矛盾ではありません．

$\boxed{\text{採点基準}}$　2 点．(1) と (2) で 1 点ずつ．(1) は φ^{-1} が同相 (あるいは φ が同相，あるいは φ^{-1} が連続) であるから，という理由が説明されていれば可．(あるいはコンパクトの定義に戻って正しく証明しているのももちろん可．) (2) は正しい反例が与えられていれば OK．(反例であることの証明が間違っていても，(2) で減点はしない．)

問題 50　まず f は C^∞ 級写像であるから，p の座標近傍 $(U;x_1,\dots,x_m)$ および $f(p)$ の座標近傍 $(V;y_1,\dots,y_n)$ であって $f(U)\subset V$ であるものが取れる．また座標を平行移動することにより $x_i(p)=0$, $y_j(f(p))=0(\forall i,j)$ と仮定してよい．

　座標によって U,V をユークリッド空間の開集合，$f\colon U\to V$ とみなすことにする．沈めこみの仮定から $(Jf)_0$ の表す線形写像は全射である．即ち $(Jf)_0$ のランクは n であり，$(Jf)_0$ の n 個の行ベクトルは一次独立．これに適当なベクトル $\mathbf{a}_{n+1},\dots,\mathbf{a}_m$ を加えて $\mathbb{R}^m$ の基底とすることができる．つまり

$$\begin{pmatrix}(Jf)_0\\ \mathbf{a}_{n+1}\\ \vdots\\ \mathbf{a}_m\end{pmatrix}\tag{1}$$

が正則行列となるような行ベクトル $\mathbf{a}_{n+1},\dots,\mathbf{a}_m$ をとることができる．C^∞ 級写像 $\varphi\colon U\to\mathbb{R}^m$ を

$$\varphi(x_1,\dots,x_m)=\begin{pmatrix}f(x_1,\dots,x_m)\\ (\mathbf{a}_{n+1},\mathbf{x})\\ \vdots\\ (\mathbf{a}_m,\mathbf{x})\end{pmatrix}$$

で定める．ただし $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ で $(\cdot, \cdot)$ は標準的なスカラー積である．$\varphi(0) = 0$ に注意する．φ の原点での Jacobi 行列 $(J\varphi)_0$ は上の式 (1) で与えられるので正則である．逆関数定理により原点の開近傍 $W \subset U$, $W' \subset \mathbb{R}^m$ が存在して $\varphi(W) = W'$ であり $\varphi\colon W \to W'$ は C^∞ 級同相写像である．$\mathbf{x} \in W'$ に対して

$$\mathbf{x} = \varphi \circ \varphi^{-1}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f \circ \varphi^{-1}(\mathbf{x}) \\ (\mathbf{a}_{n+1}, \varphi^{-1}(\mathbf{x})) \\ \vdots \\ (\mathbf{a}_m, \varphi^{-1}(\mathbf{x})) \end{pmatrix}$$

両辺の最初の n 成分を見れば

$$(f \circ \varphi^{-1})(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_n)$$

が得られる．これは座標 (W, φ) に関して $f|_W$ を表示したものである．

$\boxed{\text{採点基準}}$　2 点．(この解答以外にも方針はあるだろうが[1]) 正しい方針でできていれば開近傍の取り方など細かいところは大目に見たい．授業では逆関数定理と陰関数定理は同値であることを説明したので，逆関数定理ではなく，陰関数定理から導いている解答があったとしても OK とする．基本的には 2 点か 0 点で，部分点を出すかどうかは個別に判断する．

問題 51　$\mathbb{R}^n$ の開集合 U で定義された C^∞ 級関数 $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ が $\det((Jf)_0) \neq 0$ を満たすとする．$0 \in U$ かつ $f(0) = 0$ として，0 の近傍で逆関数があることを示そう．

$g(x, y) = x - f(y)$ を考える．これは $\mathbb{R}^n \times U$ 上で定義された $\mathbb{R}^n$ 値関数で，

$$\det\left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(0, 0)\right) \neq 0$$

を満たす．したがって陰関数定理から $0 \in \mathbb{R}^n$ の開近傍 V, W および C^∞ 級写像 $\varphi\colon V \to W$ が存在して，$W \subset U$ であり，$(x, y) \in V \times W$ に対して

$$g(x, y) = 0 \iff y = \varphi(x)$$

このとき φ が f の逆関数 (逆写像) になっている．$V' = f^{-1}(W) \cap V$ とおくとき，V' は 0 の開近傍であり，$f(V') \subset W$．また $\varphi(V') \subset W$ は明らかである．上のことから $(x, y) \in V' \times W$ に対して

$$x = f(y) \iff y = \varphi(x)$$

ゆえ f と φ は互いに逆写像で $f|_{V'}\colon V' \to W$ は微分同相写像．

問題 52　S^n を問題 15 のチャート $(U_i^\pm, \varphi_i^\pm)$ で覆う．例えば U_{n+1}^+ での包含写像 i の座標表示は

$$i \circ (\varphi_{n+1}^+)^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = \left(x_1, \ldots, x_n, \sqrt{1 - x_1^2 - \cdots - x_n^2}\right)$$

である．このヤコビ行列が単射になることは容易にチェックできる．

$d_p i\colon T_p S^n \to T_p \mathbb{R}^{n+1}$ は単射であるので，$T_p S^n$ は $T_p \mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{n+1}$ の部分空間と見なすことができる．(ベクトル空間 V に対して $T_x V = V$ であることは問題 43 で示した．)

問題 53　$f(z) = f(-z)$ であり，f は単射でないので当然微分同相写像ではない．f の微分が同型になることは容易．

問題 54　f は全単射なので逆写像 f^{-1} が存在する．逆関数定理により，f^{-1} は C^∞ 級であることが分かる．(各点での局所的な議論で分かる．詳細略．)

[1] [松本幸夫] の定理 10.3 の証明はすこし違う方針で行っているようである．

問題 55　存在しない．$f=(f_1,f_2)$ とおく．ただし f_i は S^2 上の C^∞ 級関数．S^2 はコンパクトなので f_1 はどこかの点 $p\in S^2$ で最大値をとる．そのような点で f_1 の座標表示の偏微分係数は全て消えている．従ってそのような点で f の座標表示のヤコビ行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$$

の形であり，正則でない．つまり f ははめ込みでない．

問題 56　$p=(z_1,z_2)\in S^3$ で沈めこみであることを示そう．$z_2\neq 0$ とする．写像 $g\colon \mathbb{C}\to S^3$ を

$$g(z)=\frac{1}{|z_2|\sqrt{1+|z|^2}}(z_2 z, z_2)$$

とおくとき，$|z_1|^2+|z_2|^2=1$ より $g(z_1/z_2)=(z_1,z_2)=p$ である．また g は明らかに C^∞ 級写像であって $f\circ g=\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$．これから $d_pf\circ d_{z_1/z_2}g=\mathrm{id}$．従って d_pf は全射である．

次に $z_2=0$ とする．このとき $|z_1|=1,\ f(p)=\infty$ である．∞ の周りの $\widehat{\mathbb{C}}$ の座標近傍 $(U_2=\{\infty\}\cup\mathbb{C}^\times,\varphi_2)$ を $\varphi_2(z)=1/z$ で定義する．また座標 $\varphi_2(z)$ を w で表すことにする．写像 $h\colon U_2\to S^3$ を (座標 w を用いて)

$$h(w)=\frac{1}{\sqrt{1+|w|^2}}(z_1, z_1 w)$$

と定める．h は C^∞ 級写像で，$h(0)=p,\ f\circ h=\mathrm{id}_{U_2}$ を満たすから，前半と同じ理由により d_pf が全射であることが分かる．

問題 57

(i) 座標の平行移動により $p=0,\ f(p)=0$ としてよい．また $f(x)$ を $(Jf)_p^{-1}f(x)$ で置き換えて $(Jf)_p=E_n$ と仮定できる．

(ii) ある $\delta>0$ に対して $f(x)$ は $B_\delta(0)$ で定義されているとしてよい．Taylor の定理から

$$f(x)=(Jf)_0x+o(|x|)=x+o(|x|)$$

であり，特にある $0<\epsilon<\delta$ が存在して $|f(x)-x|\le\frac{1}{2}|x|$ が $\overline{B_\epsilon(0)}$ 上で成立する．$|y|\le\frac{\epsilon}{2}$ とすると，$x\in\overline{B_\epsilon(0)}$ に対して $g_y(x)$ は定義され，

$$|g_y(x)|=|y-f(x)+x|\le|y|+|x-f(x)|\le\frac{\epsilon}{2}+\frac{|x|}{2}\le\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon.$$

つまり $g_y\colon\overline{B_\epsilon(0)}\to\overline{B_\epsilon(0)}$ を定める．

(iii) ヒントより

$$\begin{aligned}
|g_y(x_1)-g_y(x_2)| &= \left|\int_0^1 \frac{d}{dt}g_y(tx_1+(1-t)x_2)dt\right| \\
&= \left|\int_0^1 (E_n-(Jf)_{tx_1+(1-t)x_2})(x_1-x_2)dt\right| \\
&\le \int_0^1 \left|(E_n-(Jf)_{tx_1+(1-t)x_2})(x_1-x_2)\right|dt \\
&\le \int_0^1 \left\|(E_n-(Jf)_{tx_1+(1-t)x_2})\right\||x_1-x_2|dt
\end{aligned}$$

f は C^1 級で $(Jf)_0 = E_n$ だから，ϵ を小さく取り直せば $x \in \overline{B_\epsilon(0)}$ に対して

$$\|E_n - (Jf)_x\| \leq \frac{1}{2}$$

となる．ここで $x_1, x_2 \in \overline{B_\epsilon(0)}$ に対して上の計算から

$$|g_y(x_1) - g_y(x_2)| \leq \int_0^1 \frac{1}{2}|x_1 - x_2| dt = \frac{1}{2}|x_1 - x_2|.$$

すなわち g_y は縮小写像．縮小写像の原理から $|y| \leq \epsilon/2$ のとき，$g_y(x) = x$ を満たす $x \in \overline{B_\epsilon(0)}$ が一意に存在する．($B_\epsilon(0)$ は完備距離空間であることを使った．)

(iv) $y_1, y_2 \in \overline{B_{\epsilon/2}(0)}$ とし，$x_1, x_2 \in \overline{B_\epsilon(0)}$ を $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$ とする．このとき

$$\begin{aligned} |y_1 - y_2| = |f(x_1) - f(x_2)| &\geq |x_1 - x_2| - |f(x_1) - x_1 - (f(x_2) - x_2)| \\ &= |x_1 - x_2| - |g_0(x_1) - g_0(x_2)| \\ &\geq |x_1 - x_2| - \frac{1}{2}|x_1 - x_2| = \frac{1}{2}|x_1 - x_2| \end{aligned}$$

ここで (iii) で得た評価を使った．これは f^{-1} が連続であることを示す．

(v) $y \in B_{\epsilon/2}(0)$ をとる．十分小さい $a \in \mathbb{R}^n$ に対して $x = f^{-1}(y)$, $x + b(a) = f^{-1}(y + a)$ とおく．($x, x + b(a) \in \overline{B_\epsilon(0)}$．) ここで (iv) より $|b(a)| \leq 2|a|$ であることに注意する．f は全微分可能なので，任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して，$|b| < \delta$ のとき

$$|f(x + b) - f(x) - (Jf)_x b| \leq \epsilon|b|$$

従って $b = b(a)$ とおけば，$|a| < \delta/2$ のとき $|b(a)| \leq 2|a| < \delta$ であって，

$$|f(x + b(a)) - f(x) - (Jf)_x b(a)| \leq \epsilon|b(a)| \leq 2\epsilon|a|$$

すなわち，

$$|a - (Jf)_x(f^{-1}(y + a) - f^{-1}(y))| \leq 2\epsilon|a|$$

がわかる．これを書き換えると

$$|f^{-1}(y + a) - f^{-1}(y) - ((Jf)_x)^{-1}a| \leq 2\epsilon\|((Jf)_x)^{-1}\| \cdot |a|$$

これは f^{-1} は y で全微分可能であり，$(Jf^{-1})_y = ((Jf)_x)^{-1}$ であることを示す．

(vi) 逆関数を $h = f^{-1}$ とおく．$(Jh)_y = ((Jf)_{h(y)})^{-1}$ より h の偏微分係数は逆行列の係数を与える有理関数 $R_{jk}(\{a_{i,j}\})$ を用いて

$$\frac{\partial h_j}{\partial y_k}(y) = R_{jk}\left(\left\{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(h(y))\right\}\right)$$

の形に書けることが分かる．したがって h の偏微分係数は全て連続であり，h は C^1 級．この式から帰納的に，h は r 階偏微分可能で，その偏微分係数は f の r 階までの偏微分係数 $Jf, J^2f, \ldots, J^r f$ と h の $r-1$ 階までの偏微分係数 $Jh, \ldots, J^{r-1}h$ の有理関数として表されることが示せる．

$$\frac{\partial^r h_j}{\partial y_{k_1} \cdots \partial y_{k_r}}(y) = R_{j,k_1,\ldots,k_r}(Jf(h(y)), \ldots, J^r f(h(y)), Jh(y), \ldots, J^{r-1}h(y))$$

従って $h = f^{-1}$ は C^∞ 級．