幾何学 I　演習問題 No.4 略解

問題 38　定数関数 $f_1 \equiv 1$ について，方向微分の定義（Leibniz 則）から，$v(f_1) = v(f_1 \cdot f_1) = 2v(f_1)$. 従って $v(f_1) = 0$ であり，方向微分の $\mathbb{R}$-線型性から任意の定数関数 f について $v(f) = 0$.

問題 39

(1) 点 p での方向微分 v の 3 つの性質は次の通りである．φ_1, φ_2 を p の周りで定義された C^∞ 級関数とするとき，

(a) φ_1, φ_2 が点 p のある近傍で一致するならば $v(\varphi_1) = v(\varphi_2)$,

(b) 実数 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ について $v(\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2) = v(\varphi_1) + \mu v(\varphi_2)$,

(c) $v(\varphi_1\varphi_2) = \varphi_1(p) \cdot v(\varphi_2) + v(\varphi_1) \cdot \varphi_2(p)$.

この 3 つの性質を $d_pf(v)$ に対して確かめる．

(a) φ_1, φ_2 が $f(p)$ の周りで定義された C^∞ 級関数で $f(p)$ の十分小さい近傍 U で一致するものとする．このとき $\varphi_1 \circ f$ および $\varphi_2 \circ f$ は $f^{-1}(U)$ で一致する.（$f^{-1}(U)$ が p の近傍であることは f が点 p で連続であることから従う．また，点 p で C^∞ 級ならば点 p で C^∞ 級であることは授業で示した.）従って $v(\varphi_1 \circ f) = v(\varphi_2 \circ f)$.

(b) φ_1, φ_2 を $f(p)$ の周りで定義された C^∞ 級関数，$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ とする．このとき

$$v((\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2) \circ f) = v(\lambda\varphi_1 \circ f + \mu\varphi_2 \circ f) = \lambda v(\varphi_1 \circ f) + \mu v(\varphi_2 \circ f)$$

(c) φ_1, φ_2 を $f(p)$ の周りで定義された C^∞ 級関数とする．

$$\begin{aligned} v((\varphi_1 \cdot \varphi_2) \circ f) = v((\varphi_1 \circ f) \cdot (\varphi_2 \circ f)) &= (\varphi_1 \circ f)(p) \cdot v(\varphi_2 \circ f) + v(\varphi_1 \circ f) \cdot (\varphi_2 \circ f)(p) \\ &= \varphi_1(f(p)) \cdot v(\varphi_2 \circ f) + v(\varphi_1 \circ f) \cdot \varphi_2(f(p)) \end{aligned}$$

(2) $a, b \in \mathbb{R}$, $v, w \in T_pM$ とする．$f(p)$ の周りで定義された C^∞ 級関数 φ に対して，

$$\begin{aligned} (d_pf(av + bw))(\varphi) &= (av + bw)(\varphi \circ f) = av(\varphi \circ f) + bw(\varphi \circ f) \\ &= a((d_pf)(v))(\varphi) + b((d_pf)(w))(\varphi) \end{aligned}$$

従って $d_pf(av + bw) = ad_pf(v) + bd_pf(w)$.

問題 40　点 $p \in M$ の座標近傍 (U, φ) をとる．M の次元を m とすると，$U' := \varphi(U)$ は $\mathbb{R}^m$ の開集合である．$\varphi(p) \in U'$ より，ある $\epsilon > 0$ に対して $\varphi(p)$ を中心とする半径 2ϵ の開球体 $B_{2\epsilon}(\varphi(p)) = \{x \in \mathbb{R}^m : |x - \varphi(p)| < 2\epsilon\}$ は U' に含まれる．$V' = B_\epsilon(\varphi(p))$ とおくと，V' の閉包 $\overline{V'}$ は半径 ϵ の閉球体であって U' に含まれるコンパクト集合である．ここで $V = \varphi^{-1}(V')$, $K = \varphi^{-1}(\overline{V'})$ とおく．φ は同相写像であるから V は U の開集合であり（とくに M の開集合でもある），K はコンパクト集合．M はハウスドルフであるから K は閉集合．従って $\overline{V} \subset K$ である．コンパクト集合の閉部分集合はコンパクトなので，$\overline{V}$ はコンパクトである．以上により問題の開近傍が存在することが示された.（さらに $K = \overline{V}$ であることも言える.）

注意：この証明で M がハウスドルフであることは必ず使う．そうでなければ反例がある．ハウスドルフではない位相多様体の例としては $\mathbb{R} \times \{1, 2\}$ に次の同値関係を入れて割ったものがある．

$$(x, n) \sim (y, m) \iff x = y \neq 0 \text{ または } (x = y = 0 \text{ かつ } n = m)$$

これは $\mathbb{R}$ の2つのコピーを原点を除いて張り合わせたものであり，2つの原点がある．2つの原点が分離できないのでハウスドルフではないが，ハウスドルフ以外の位相多様体の条件を満たす．同様に $\mathbb{R}\times\mathbb{N}$ に同値関係

$$(x,n)\sim(y,m) \iff x=y\neq 0 \text{ または } (x=y=0 \text{ かつ } n=m)$$

を入れてこれで割った位相空間 M もハウスドルフ以外の条件を満たす．この位相空間において点 $[(0,1)]\in M$ の開近傍 V でその閉包 $\overline{V}$ がコンパクトではないものは存在しない．

$\boxed{\text{採点基準}}$ 2点．基本的には正しく議論できていれば2点で，そうでなければ0点．特にハウスドルフ性を使っていない答案は0点とする．それ以外の軽微なミスは個別に判断する．

問題 41

(1) 変数変換を実座標で書くと

$$s(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2},\quad t(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2}$$

また逆変換は

$$x(s,t)=\frac{s}{s^2+t^2},\quad y(s,t)=-\frac{t}{s^2+t^2}$$

で与えられる．従って

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)_z &= \frac{\partial x(s,t)}{\partial s}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_z+\frac{\partial y(s,t)}{\partial s}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_z=\frac{t^2-s^2}{(s^2+t^2)^2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_z+\frac{2st}{(s^2+t^2)^2}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_z\\
&=-\Re(z^2)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_z-\Im(z^2)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_z\\
\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_z &= \frac{\partial x(s,t)}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_z+\frac{y(s,t)}{t}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_z=-\frac{2st}{(s^2+t^2)^2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_z+\frac{t^2-s^2}{(t^2+s^2)^2}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_z\\
&=\Im(z^2)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_z-\Re(z^2)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_z
\end{aligned}$$

ここで $\Re(x)$ は x の実部，$\Im(x)$ は x の虚部を表す．(あるいは以下の (2) のように $w\mapsto z=w^{-1}$ を複素関数の意味で微分して計算することもできて，そちらの方が計算は容易である．)

(2) $z=a$ の近傍で写像 f を定義域側の座標 z，値域側の座標 w により表示すると，

$$z\mapsto w=w(z)=\frac{a-z}{z}=\frac{a}{z}-1$$

となる．この関数は複素微分可能でありその意味で

$$\frac{dw}{dz}(z)=-\frac{a}{z^2}$$

複素微分可能性の定義から，$w(z)$ を (x,y) の関数と思うとき，

$$\frac{\partial w}{\partial x}(a)=\frac{dw}{dz}(a)=-\frac{1}{a},\quad \frac{\partial w}{\partial y}(a)=\sqrt{-1}\frac{dw}{dz}(a)=-\frac{\sqrt{-1}}{a}.$$

これを実部，虚部に分けると Jacobi 行列となり，

$$\begin{aligned}
d_af\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_a\right)&=-\Re\left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)_\infty-\Im\left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_\infty\\
d_af\left(\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_a\right)&=-\Re\left(\frac{\sqrt{-1}}{a}\right)\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)_\infty-\Im\left(\frac{\sqrt{-1}}{a}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_\infty
\end{aligned}$$

したがって求める行列は

$$\begin{pmatrix} -\Re(1/a) & \Im(1/a) \\ -\Im(1/a) & -\Re(1/a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Re(a)/|a|^2 & -\Im(a)/|a|^2 \\ \Im(a)/|a|^2 & -\Re(a)/|a|^2 \end{pmatrix}$$

採点基準 (1)1 点，(2)1 点．各々，計算方法が正しく，かつ，結果が正しくて 1 点．計算結果の符号のミスは (各問ごとに)2 箇所までは減点しない．(2) で a を実数と (間違って) 仮定しているものは 0 点．また行列を転置行列にしているものは，あまり望ましくないが減点しない．(普通，行列は縦ベクトルに左から作用すると考えますが，横ベクトルに右から作用すると考える人もいるかもしれないので．)

問題 42 ヒントにあるように $\frac{d}{dt}f(tx) = \sum_{i=1}^m x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)$ の両辺を積分して，

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^m x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)dt$$

$h_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)dt$ とおくとき，これが C^∞ 級になるのは簡単な解析の演習である (積分のパラメータに関する微分)．さらに $h_i(x)$ にこの結果を適用すると，$h_i(x) = h_i(0) + \sum_{j=1}^m g_{i,j}(x)x_j$，$g_{i,j}$ は C^∞ 級，と書ける．これから

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^m x_i h_i(0) + \sum_{i,j} g_{i,j}(x)x_i x_j$$

の形に書ける．x_i で微分して $x=0$ とおくことにより $h_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$ が分かる．

問題 43 V の基底を $e_1, \dots, e_n$ とし，ベクトル空間の同型 $V \cong \mathbb{R}^n$ を $\sum_{i=1}^n x_i e_i \mapsto (x_1, \dots, x_n)$ で定める．これは V の座標 $(x_1, \dots, x_n)$ を定める．$(\frac{\partial}{\partial x_1})_x, \dots, (\frac{\partial}{\partial x_n})_x$ は T_xV の基底であるので，写像 $\Phi\colon V \to T_xV$ は e_i を $(\frac{\partial}{\partial x_i})_x$ に写す写像であることを確かめれば十分である．

問題 44 (1) i の局所座標表示がすべて C^∞ 級であることを示せばよい．例えば S^2 をアトラス $(U_i^\pm, \varphi_i^\pm)$ で覆う．ここで $U_i^\pm = \{(x_1,x_2,x_3) \in S^2 : \pm x_i > 0\}$ であり，$\varphi_i^\pm$ は i 成分以外の成分への射影で定まるものである．例えば $\varphi_1^+(x_1,x_2,x_3) = (x_2,x_3)$ である．U_1^+ 上での i の局所座標表示は

$$i \circ (\varphi_1^+)^{-1}(x_2,x_3) = (\sqrt{1-x_2^2-x_3^2}, x_2, x_3)$$

であり，これは (各成分が) $\{(x_2,x_3) : x_2^2+x_3^2 < 1\} = \varphi_1^+(U_1^+)$ 上の C^∞ 級写像．

(2) i の微分 di は，i の局所座標表示の Jacobi 行列で与えられたことを思い出すと，例えば U_1^+ の点 $p = (x_1,x_2,x_3)$ では d_pi の行列表示は

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\sqrt{1-x_2^2-x_3^2}}{\partial x_2} & \frac{\partial\sqrt{1-x_2^2-x_3^2}}{\partial x_3} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x_2}{\sqrt{1-x_2^2-x_3^2}} & -\frac{x_3}{\sqrt{1-x_2^2-x_3^2}} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x_2}{x_1} & -\frac{x_3}{x_1} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる．このことから d_pi の像が与えられたものになることは容易に見て取れる．