幾何学 I　演習問題 No.3　略解

問題 26　$\widehat{\mathbb{C}}$ をいつものように二つの座標近傍 (U_1, φ_1), (U_2, φ_2) で覆う．すなわち，$U_1 = \mathbb{C}$, $\varphi_1(z) = z$ および $U_2 = \mathbb{C}^\times \cup \{\infty\}$, $\varphi_2(z) = \frac{1}{z}$ ($z \neq 0$ のとき)，$\varphi_2(\infty) = 0$ とおく．

(1) chart U_1 上では $f(U_1) \subset U_1$ であり，$\varphi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}(z) = az + b$ ゆえ明らかに C^∞ 級．

(2) あとは残りの点 $\infty \in \widehat{\mathbb{C}}$ で C^∞ 級であることを示す．$f(U_2 \setminus \{-b/a\}) \subset U_2$ であるが，

$$\begin{aligned}\varphi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1}(w) &= \begin{cases} \varphi_2(a\frac{1}{w} + b) & (w \neq 0 \text{ のとき}) \\ \varphi_2(\infty) & (w = 0 \text{ のとき}) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{a\frac{1}{w}+b} & (w \neq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (w = 0 \text{ のとき}) \end{cases} \\ &= \frac{w}{a + bw}\end{aligned}$$

は w 平面の $\varphi_2(\infty) = 0$ の近傍で C^∞ 級である．したがって f は ∞ で C^∞ 級．

$\boxed{\text{採点基準}}$　2 点．授業では $f\colon M \to N$ が点 p で C^∞ 級であることを p を含む座標近傍 (U, φ), $f(p)$ を含む座標近傍 (V, ψ) が存在して，(1) $f(U) \subset V$, (2) $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U) \to \psi(V)$ が C^∞ 級，が成り立つことと定義した [1]．この条件が全ての $p \in M$ で成り立つとき，f は C^∞ 級写像と言われる．この問題では,

(a) [1 点]$\mathbb{C}$ 上 (の各点) で C^∞ 級であることが (明らかだが) 確かめられているか,

(b) [1 点] 無限遠点 ∞ で C^∞ 級であることが ($\varphi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1}$ を計算することで) 確かめられているか,

の 2 つのポイントをみる．(a) については f が C^∞ 級と述べてあるだけで OK．(b) について，(本当はした方がいいが) $f(U_2 \setminus \{-b/a\}) \subset U_2$ に注意していなくても (あるいは $f(U_2) \subset U_2$ などと間違っていても) $\varphi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1}$ が (正しく) 計算できていたら減点はしない．$\varphi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1}$ の計算で（メインの場合だけを計算し）場合分けを怠っている解答も減点はしない．

問題 27　f の逆写像が Möbius 変換 $g(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$ で与えられることを示せばよい．詳細略.

問題 28　仮定から q の座標近傍 (V, ψ), $g(q)$ の座標近傍 (W, ξ) が存在して $g(V) \subset W$ かつ $\xi \circ g \circ \psi^{-1}\colon \psi(V) \to \xi(W)$ は $\psi(q)$ の近傍で C^∞ 級である．また次の問題 29 でみるように f が点 p で C^∞ 級であれば，f は点 p で連続である．したがって $f^{-1}(V)$ は p の近傍である．よって p の座標近傍 (U, φ) であって $U \subset f^{-1}(V)$ となるものが存在する.（このためには，まず任意に p の座標近傍 $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ をとり，$p \in O \subset f^{-1}(V)$ なる開集合 O との共通部分 $O \cap \tilde{U}$ に座標を制限すればよい.）このとき $f(U) \subset V$ である．授業中に説明したように，f が点 p で C^∞ 級であることの定義に現れる条件は，座標近傍 (U, φ), (V, ψ) のとり方によらない．したがって $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U) \to \psi(V)$ は $\varphi(p)$ の近傍で C^∞ 級である．このとき $g \circ f(U) \subset W$ であって $\xi \circ g \circ f \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U) \to \xi(W)$ は

$$\xi \circ g \circ f \circ \varphi^{-1} = (\xi \circ g \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})$$

より $\varphi(p)$ の近傍で C^∞ 級の写像と $\psi(q)$ の近傍で C^∞ 級の写像の合成であるから，$\varphi(p)$ の近傍で C^∞ 級である.

問題 29　点 p で C^∞ 級であることの定義より点 p を含む座標近傍 (U, φ) と $f(p)$ を含む座標近傍 (V, ψ) が存在して，$f(U) \subset V$ かつ $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U) \to \varphi(V)$ が C^∞ 級写像となる.

[1] ここで (1) の条件は f が点 p で連続であることを保証するために必要である.

$f(p)$ の近傍 B に対して，$f^{-1}(B)$ が p の近傍であることを示そう．そのためには $f^{-1}(B) \cap U$ が p の近傍であることを言えばよい．$f^{-1}(B) \cap U$ は同相写像 φ により

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})^{-1}(\psi(B \cap V))$$

に写される．$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ は連続であり，$\psi(B \cap V)$ は $\psi(f(p))$ の近傍であるから，この集合は $\varphi(p)$ の近傍である．従って $f^{-1}(B) \cap U$ は p の近傍である．

問題 30　同値関係の条件のうち「$c_1 \sim c_2$ ならば $c_2 \sim c_1$」および「$c \sim c$」は明らかである．推移性を証明する．c_1, c_2, c_3 を C^∞ 級曲線とし $c_1 \sim c_2$, $c_2 \sim c_3$ とする．このとき点 p を含む座標近傍 (U, φ), (V, ψ) が存在して，次が成立する．

$$\frac{d}{dt}\varphi(c_1(t))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\varphi(c_2(t))\Big|_{t=0}, \qquad \frac{d}{dt}\psi(c_2(t))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\psi(c_3(t))\Big|_{t=0}.$$

ここで $\frac{d}{dt}\psi(c_1(t))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\psi(c_2(t))\Big|_{t=0}$ を示せばよい．$t = 0$ の近傍で

$$(\psi \circ c_i)(t) = (\psi \circ \varphi^{-1})((\varphi \circ c_i)(t))$$

が成立する．$\psi \circ \varphi^{-1}$ は $\mathbb{R}^m$ の開集合から $\mathbb{R}^m$ の開集合への C^∞ 級写像，$\varphi \circ c_i$ は $\mathbb{R}$ の 0 の近傍から $\mathbb{R}^m$ への C^∞ 級写像であることに注意する．ユークリッド空間の間の微分可能写像に関する chain rule から

$$\frac{d}{dt}(\psi \circ c_i)(t)\Big|_{t=0} = D_{\varphi(p)}(\psi \circ \varphi^{-1}) \left[\frac{d}{dt}(\varphi \circ c_i)(t)\right]_{t=0}$$

であり，これから $\frac{d}{dt}\psi(c_1(t))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\psi(c_2(t))\Big|_{t=0}$ が従う．

問題 31　座標近傍 (U, φ) をとり，曲線の同値類 $[c]$ に対して $\frac{d}{dt}\varphi(c(t))|_{t=0} \in \mathbb{R}^m$ を対応させる写像が全単射であることを示せばよい．単射性は定義から明らか．全射性はベクトル $v \in \mathbb{R}^m$ に対して C^∞ 級曲線を $c_v(t) = \varphi^{-1}(\varphi(p) + vt)$ と定義すると，$\frac{d}{dt}\varphi(c_v(t))|_{t=0} = v$ であることから．($c_v(t)$ が $t = 0$ の近傍で well-defined であり，C^∞ 級であることを確かめる．詳細は略.)

問題 32　微分同相写像 $f \colon S^2 \to \widehat{\mathbb{C}}$ を次のように構成する．S^2 の北極点からの立体射影を $\varphi \colon S^2 \backslash \{(0,0,1)\} \to \mathbb{R}^2$ とする（問題 6 参照）．$\mathbb{R}^2$ を $\mathbb{C}$ と同一視する写像 $(x, y) \mapsto x + iy$ と合成して写像

$$f \colon S^2 \setminus \{(0,0,1)\} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$$

を得る．さらに $f(0,0,1) = \infty$ とおくことで，これは

$$f \colon S^2 \to \widehat{\mathbb{C}}$$

に拡張される．

これが微分同相を与えていることを示そう．f が全単射であることは明らかであるから，f および f^{-1} が C^∞ 級であることを示す．S^2 と $\widehat{\mathbb{C}}$ の座標近傍について確認しておく．$(0,0,1)$ からの立体射影の定める座標は

$$U = S^2 \setminus \{(0,0,1)\}, \qquad \varphi(x,y,z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)$$

であり，$(0,0,-1)$ からの立体射影の定める座標は

$$V = S^2 \setminus \{(0,0,-1)\}, \qquad \psi(x,y,z) = \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z}\right)$$

また $\widehat{\mathbb{C}}$ の座標は

$$(U_1 = \mathbb{C}, \varphi_1 = \mathrm{id}), \qquad (U_2 = \widehat{\mathbb{C}}, \varphi_2(z) = 1/z)$$

により与えられた．f は北極を $\infty \in \widehat{\mathbb{C}}$ に写し，南極を $0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ に写す．したがって $f(U) = U_1$, $f(V) = U_2$ である．そこで f が C^∞ 級であることを示すには，$\varphi_1 \circ f \circ \varphi^{-1}$ および $\varphi_2 \circ f \circ \psi^{-1}$ が C^∞ 級であることを示せばよい．

$$\begin{aligned}
\varphi_1 \circ f \circ \varphi^{-1}(x, y) &= x + iy \\
\varphi_2 \circ f \circ \psi^{-1}(x, y) &= \varphi_2 \circ f \left(\frac{x}{1 + x^2 + y^2}, \frac{y}{1 + x^2 + y^2}, \frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2} \right) \\
&= \begin{cases} \varphi_2 \left(\frac{x}{x^2+y^2} + i \frac{y}{x^2+y^2} \right) & (x, y) \neq (0, 0) \text{ のとき} \\ \varphi_2(\infty) & (x, y) = (0, 0) \text{ のとき} \end{cases} \\
&= x - iy
\end{aligned}$$

よりどちらも C^∞ 級である．逆写像 f^{-1} が C^∞ 級であることを示すには $\varphi \circ f^{-1} \circ \varphi_1^{-1}$ および $\psi \circ f^{-1} \circ \varphi_2^{-1}$ が C^∞ 級であることを示せばよい．これらは上に計算した写像の逆写像であり，

$$\begin{aligned}
\varphi \circ f^{-1} \circ \varphi_1^{-1}(x + iy) &= (x, y) \\
\psi \circ f^{-1} \circ \varphi_2^{-1}(x + iy) &= (x, -y)
\end{aligned}$$

で与えられる．これらは明らかに C^∞ 級である．

$\boxed{\text{採点基準}}$　2 点．$f \colon M \to N$ が C^∞ 級微分同相写像であることの定義は，f が全単射であって f と f^{-1} がどちらも C^∞ 級であることである．f の正しい候補を与えていれば 1 点，さらにその f が微分同相写像であることを定義に基づき正しく示していれば 1 点．後半部分については f(あるいは f^{-1}) が C^∞ 級写像であることを示す条件のうち，(本当はあった方がいいが) 「$f(U) \subset V$」に相当する部分は必ずしもできていなくても，全ての必要な座標表示「$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$」が正しく計算できていれば良いものとする．また (もちろん言及するべきだが) f が全単射であることに言及していなくても減点はしない．(この問題ではアトラスが問題文に与えられているので，解きやすくなっているはず．)

問題 33　$U_1 = \{(z_1, z_2) \in S^3 \mid z_2 \neq 0\}$, $U_2 = \{(z_1, z_2) \in S^3 \mid z_1 \neq 0\}$, $V_1 = \mathbb{C} \subset \hat{\mathbb{C}}$, $V_2 = \hat{\mathbb{C}} \backslash \{0\}$ とおく．$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ とみなし，次のように写像を定める：

$$\begin{aligned}
&\psi_1 : U_1 \to V_1 \times S^1 \qquad && \psi_1(z_1, z_2) = \left(\frac{z_1}{z_2}, \frac{z_2}{|z_2|} \right), \\
&\psi_2 : U_2 \to V_2 \times S^1 \qquad && \psi_2(z_1, z_2) = \left(\frac{z_1}{z_2}, \frac{z_1}{|z_1|} \right).
\end{aligned}$$

ただし ψ_2 の定義において $z_2 = 0$ のときは $z_1/z_2 = \infty \in V_2$ とみなす．このとき ψ_1, ψ_2 は全単射であり，逆写像は

$$\psi_1^{-1}(z, \omega) = \left(\frac{z\omega}{1 + |z|^2}, \frac{\omega}{1 + |z|^2} \right), \quad \psi_2^{-1}(z, \omega) = \left(\frac{\omega}{1 + |1/z|^2}, \frac{z\omega}{1 + |1/z|^2} \right)$$

と与えられることが簡単な計算によって確かめられる．適当に局所座標をとって表示すればこれらが滑らかであることもわかるので，ψ_1, ψ_2 は微分同相写像である．(ここでは証明を省略するが，問題の趣旨からはこのことをまじめに確かめることが求められている．特に $z_2 = 0$ で滑らかであることを示す必要がある．) ここで $f|_{U_i} = p_1 \circ \psi_i$　($i = 1, 2$, p_1 は第一成分への射影) であることに注意すると，各射影は C^∞ 級であるから f が C^∞ であること

がわかる．また，$f^{-1}(V_i)=U_i$ であるから，１点 $z\in V_i$ のファイバー $f^{-1}(z)$ は微分同相 ψ_i によって $\{z\}\times S^1$ に写され，従って S^1 と微分同相である．

問題 34　存在しない．ここでは基本群についての基本事項は既知であるものとしてその証明を与える．$f\circ s=\mathrm{id}_{S^2}$ なる C^∞ 写像 s が存在したとする．問題 33 の解答と同じ記号のもと，$p_2\circ\psi_i\circ s: V_i\to S^1$ はある C^∞ 級写像であり，これを $S^1=\{|z|=1\}\subset V_1\cap V_2$ に制限したものを $s_i: S^1\to S^1$ とする．これらは可縮な空間 V_i を経由しているので，誘導される写像 $s_{i*}:\pi_1(S^1)\to\pi_1(S^1)$ は零写像である．ところが前解答を用いた具体的な計算により

$$s_2(z)=p_2\circ\psi_2\circ\psi_1^{-1}(z,s_1(z))=zs_1(z)$$

であり，$\deg s_{2*}=\deg s_{1*}+1$ が成立する（$\deg$ は写像度を表す）．これは $\deg s_{1*}=\deg s_{2*}=0$ であったことに矛盾する．

問題 35　多項式として $P(z)=0$ のときは明らかであるので，そうでない場合を考える．問題の設定上，$Q(z)\neq 0$ なる $z\in\mathbb{C}$ について等しい関数は同じものと見てよいので，多項式 $P(z),Q(z)$ は共通零点を持たないとしてよい．このとき，$f(z)=\lim_{z'\to z}P(z')/Q(z')$ として f を $\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}}$ へと拡張する．とくに $\{z\in\mathbb{C}\mid Q(z)\neq 0\}$ 上 f は元の f に等しく，$\{z\in\mathbb{C}\mid Q(z)=0\}$ 上 $f(z)=\infty$ である．$Q(z_0)=0$ なる $z_0\in\mathbb{C}$ での f の C^∞ 性は $Q(z)/P(z)$ の $z=z_0$ まわりでの C^∞ 性に帰着されるが，これは $P(z_0)\neq 0$ だから明らかである．$z=\infty$ での C^∞ 性も同様に座標をとって示すことができるが，$\hat{\mathbb{C}}$ 上の微分同相である Möbius 変換を合成しても C^∞ であるかどうかは変わらないことを用いれば，$\deg P<\deg Q$（従って $f(\infty)=0$）と仮定してよく，幾分証明が楽になる．

問題 36　Möbius 変換が微分同相であることは問題 27 で既に示されているので逆を示す．前解答と同様，$P(z),Q(z)$ は共通零点を持たないとしてよい（当然のことながら，多項式として $P(z)\neq 0$）．$f=P/Q$ が微分同相を定めるとき，$f(z)=0$ なる $z\in\mathbb{C}$ は高々１つ．したがって $P(z)$ は $a(z-b)^k$ $(a,b\in\mathbb{C},k\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$ の形の多項式であるが，$k>1$ のとすると，f の $z=b$ における微分について $df_b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=f'(b)=0$（ただしここで値域である $T_{f(b)}\hat{\mathbb{C}}$ を自然に $\mathbb{C}$ と同一視している）となるので f が微分同相であったことに反する．以上により P は高々１次の多項式であることがわかった．f が微分同相であるとき，これと Möbius 変換 $z\mapsto z^{-1}$ との合成，すなわち有理関数 Q/P もまた $\hat{\mathbb{C}}$ 上の微分同相を定めるので，先程と同様にして Q もまた高々1 次の多項式である．P と Q は共通零点を持たないと仮定していたので $P(z)/Q(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ $(ad-bc\neq 0)$ の形となり，f は Möbius 変換である．

問題 37　Sard の定理 (C^∞ 級写像の正則値の集合の測度が 0 であること) を使えば直ちに結論が得られる．この場合の初等的な解答としては例えば閉曲線 f の長さ

$$\int_{S^1}|f'(\theta)|d\theta$$

が有限確定値になることを使えばよい．ここで θ は S^1 上の角度座標で，$|f'(\theta)|$ は $\mathbb{R}^3$ の Euclid 内積の定める長さとする．f が全射であれば，S^2 上に 2 次元的に広がった点列をうまくとって，この積分が ∞ に発散することが示せる．