幾何学 I　演習問題 No.2 略解

レポート課題の問題 15，16 については，詳しい解答を与えています．

問題 11　$X \times Y$ の積位相に関する開集合は，X の開集合の族 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ および Y の開集合の族 $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ を使って

$$\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \times V_\alpha$$

の形に書ける集合である．

問題 12　$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ を異なる 2 点とする．このとき $x_1 \neq x_2$ あるいは $y_1 \neq y_2$ が成立する．$x_1 \neq x_2$ であれば X のハウスドルフ性から開集合 $U_1, U_2 \subset X$ であって $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ となるものが存在する．このとき $(x_1, y_1) \in U_1 \times Y$, $(x_2, y_2) \in U_2 \times Y$ であって $(U_1 \times Y) \cap (U_2 \times Y) = \emptyset$．したがって $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ は開集合で分離される．$y_1 \neq y_2$ の時も同様である．

問題 13　$Y_1 \times Y_2$ の開集合 O をとり，$(f_1 \times f_2)^{-1}(O)$ が開集合であることを証明する．問題 11 より O は $O = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \times V_\alpha$，$U_\alpha$ は Y_1 の開集合，V_α は Y_2 の開集合の形に書ける．ここで

$$(f_1 \times f_2)^{-1}(O) = \bigcup_{\alpha\in A} (f_1 \times f_2)^{-1}(U_\alpha \times V_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in A} f_1^{-1}(U_\alpha) \times f_2^{-1}(V_\alpha)$$

であるが，$f_1^{-1}(U_\alpha)$ および $f_2^{-1}(V_\alpha)$ は f_1, f_2 の連続性から各々X_1 と X_2 の開集合である．したがって上の集合は $X_1 \times X_2$ の開集合．

問題 14　$X^* = X \cup \{\infty\}$ を X の一点コンパクト化とする．X^* の任意の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ をとる．$\infty \in U_{\alpha_0}$ を満たす $\alpha_0 \in A$ が存在する．このとき $X \setminus U_{\alpha_0}$ は X のコンパクト集合である．$V_\alpha = U_\alpha \cap X$ とおくとき，X^* の位相の定義から V_α は X の開集合であって，$\{V_\alpha\}$ は $X \setminus U_{\alpha_0}$ の開被覆となる．コンパクト性から有限個の $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$ が存在して $X \setminus U_{\alpha_0} \subset V_{\alpha_1} \cup V_{\alpha_2} \cup \cdots \cup V_{\alpha_n}$．このとき $X \subset U_{\alpha_0} \cup U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_n}$.

問題 15　(1) $U_1^+ = \{(x_1, \ldots, x_{m+1}) \in S^m \mid x_1 > 0\}$ の点 $(x_1, \ldots, x_{m+1})$ は

$$x_1^2 + \cdots + x_{m+1}^2 = 1, \qquad x_1 > 0$$

を満たす．したがって

$$x_2^2 + \cdots + x_{m+1}^2 = 1 - x_1^2 < 1$$

であり，φ_1^+ の像は単位開球体 $B_1(0) = \{(y_1, \ldots, y_m) \mid y_1^2 + \cdots + y_m^2 < 1\}$ に含まれる．写像 $\psi_1^+ \colon B_1(0) \to U_1^+$ を

$$\psi_1^+(y_1, \ldots, y_m) = (\sqrt{1 - y_1^2 - \cdots - y_m^2}, y_1, \ldots, y_m)$$

で定めると

$$\varphi_1^+ \circ \psi_1^+ = \mathrm{id}_{B_1(0)}, \qquad \psi_1^+ \circ \varphi_1^+ = \mathrm{id}_{U_1^+}$$

は容易に検証される．特に φ_1^+ は全単射であり，その像は $B_1(0)$ に一致する．

　また，φ_1^+ は連続写像 $\mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^m$ の S^m への制限であるから連続であり，ψ_1^+ は連続写像 $B_1(0) \to \mathbb{R}^{m+1}$ で像が U_1^+ に含まれているものから定まるので連続である．(問題 4 でこれらの事実が示されている．また，$\sqrt{1 - y_1^2 - \cdots - y_m^2}$ などの関数の連続性や，各成分が連続なベクトル値関数の連続性は，既習の事実として認める．) よって $\varphi_1^+ \colon U_1^+ \to B_1(0)$ は同相写像である．

(2) 座標変換の定義域は

$$\varphi_1^-(U_1^- \cap U_2^+) = \{(y_1, \dots, y_m) \in B_1(0) \mid y_1 > 0\}$$

である．φ_1^- の逆写像は

$$(\varphi_1^-)^{-1}(y_1, \dots, y_m) = (-\sqrt{1 - y_1^2 - \cdots - y_m^2}, y_1, \dots, y_m)$$

で与えられるから，

$$\varphi_2^+ \circ (\varphi_1^-)^{-1}(y_1, \dots, y_m) = (-\sqrt{1 - y_1^2 - \cdots - y_m^2}, y_2, \dots, y_m)$$

であることが分かる．

$\boxed{\text{採点基準}}$ (1) [1 点] φ_1^+ の逆写像が明示的に与えられており，かつ φ_1^+ および $(\varphi_1^+)^{-1}$ がどちらも連続であることが主張されている．(連続性の理由が書かれていればなおよいが，書いていなくても減点はしない．)

(2) [1 点] 定義域が正しくあたえられており，かつ座標変換が正しく求められている．

問題 16 φ_2 を $\mathbb{C}^\times$ に制限して得られる写像 $\varphi_2|_{\mathbb{C}^\times} \colon \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$ は明らかに同相写像である．(実際 $z \mapsto 1/z$ の逆写像は $w \mapsto 1/w$ であり，これらの関数の (実部および虚部の) 連続性は微分積分学などで既習の事実である．) また φ_2 は明らかに全単射である．そこで φ_2 が同相であることを示すには，

$$U \subset \widehat{\mathbb{C}} \text{ が } \infty \text{ の近傍} \iff \varphi_2(U) \text{ が } 0 \text{ の近傍}$$

を示せば十分である．

$$\begin{aligned} U \subset \widehat{\mathbb{C}} \text{ が } \infty \text{ の近傍} &\iff \widehat{\mathbb{C}} \setminus U \text{ があるコンパクト閉集合に含まれる} \\ &\iff \widehat{\mathbb{C}} \setminus U \text{ は } \mathbb{C} \text{ の有界部分集合} \\ &\iff \exists M > 0,\ \{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > M\} \subset U \\ &\iff \exists M > 0,\ \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1/M\} \subset \varphi_2(U) \\ &\iff \varphi_2(U) \text{ が } 0 \text{ の近傍} \end{aligned}$$

より従う．

$\boxed{\text{採点基準}}$ [2 点] φ_2 が $z = \infty$ で連続であること，また φ_2 の逆写像 φ_2^{-1} が $w = 0$ で連続であることの両方が示されている．一方だけだと 1 点とする．

問題 17 授業でおいたように $\varphi_1 \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を恒等写像で与えられる $\widehat{\mathbb{C}}$ の座標近傍とする．ここで $f \circ \varphi_1^{-1}(z) = \frac{|z|^2}{|z|^2+1} = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1}$ および $f \circ \varphi_2^{-1}(z) = \frac{1}{1+|z|^2} = \frac{1}{1+x^2+y^2}$ は C^∞ 級関数である．ここで $z = x + \sqrt{-1}y$ とおいた．定義より f は C^∞ 級関数である．

問題 18 X の 1 点コンパクト化を $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$ とおく．包含写像 $i : X \hookrightarrow \hat{X}$ に対して，$\hat{X}$ の開集合は，∞ を含まないとき $i(U)$（U は X の開集合），∞ を含むとき $\hat{X} \setminus i(K)$（K は X のコンパクト閉集合）として定義されていた．今 X は Hausdorff であるから，$\hat{X}$ において ∞ とそれ以外の点が開近傍で分離されることを見ればよい．X は局所コンパクト空間であったから，任意の点 $x \in X$ に対して，$x \in \mathring{K} \subset K \subset X$ なるコンパクト集合 K が存在する．よって $\hat{X}$ の ∞ 以外の点の開近傍を $U_1 = i(\mathring{K})$，∞ の開近傍を $U_2 = \hat{X} \setminus i(K)$ と選べば，$U_1 \cap U_2 = \emptyset$ となる．以上より $\hat{X}$ も Hausdorff である．

問題 19　座標変換が C^∞ 級であることを示す．$(U_\alpha,\varphi_\alpha),(U_\gamma,\varphi_\gamma)\in\mathcal{S}$，$(V_\beta,\psi_\beta),(V_\delta,\psi_\delta)\in\mathcal{T}$ を用いて，2 つの座標近傍 $(U_\alpha\times V_\beta,\varphi_\alpha\times\psi_\beta)$，$(U_\gamma\times V_\delta,\varphi_\gamma\times\psi_\delta)$ を考える．座標変換は

$$\begin{aligned}&(\varphi_\gamma\times\psi_\delta)\circ(\varphi_\alpha\times\psi_\beta)^{-1}=\varphi_\gamma\circ\varphi_\alpha\times\psi_\delta\circ\psi_\beta:\\&\qquad(\varphi_\alpha\times\psi_\beta)((U_\alpha\times V_\beta)\cap(U_\gamma\times V_\delta))=\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\gamma)\times\psi_\beta(V_\beta\cap V_\delta)\\&\qquad\quad\to(\varphi_\gamma\times\psi_\delta)((U_\alpha\times V_\beta)\cap(U_\gamma\times V_\delta))=\varphi_\gamma(U_\alpha\cap U_\gamma)\times\psi_\delta(V_\beta\cap V_\delta)\end{aligned}$$

と書ける．$\varphi_\gamma\circ\varphi_\alpha^{-1}:\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\gamma)\to\varphi_\gamma(U_\alpha\cap U_\gamma)$，$\psi_\delta\circ\psi_\beta^{-1}:\psi_\beta(V_\beta\cap V_\delta)\to\psi_\delta(V_\beta\cap V_\delta)$ は C^∞ 級の座標変換であるから，$(\varphi_\gamma\times\psi_\delta)\circ(\varphi_\alpha\times\psi_\beta)^{-1}$ も C^∞ 級である．

問題 20（共通部分が空でない）2 つの座標近傍 (V_1,ψ_1), $(V_2,\psi_2)\in\mathcal{M}(\mathcal{S})$ をとる．$\mathcal{S}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ とおくとき，$\mathcal{M}(\mathcal{S})$ の定義より，$\psi_2\circ\varphi_\alpha^{-1}:\varphi_\alpha(U_\alpha\cap V_2)\to\psi_2(U_\alpha\cap V_2)$，$\varphi_\alpha\circ\psi_1^{-1}:\psi_1(U_\alpha\cap V_1)\to\varphi_\alpha(U_\alpha\cap V_1)$ は C^∞ 級となる．よって $\psi_2\circ\psi_1^{-1}=(\psi_2\circ\varphi_\alpha^{-1})\circ(\varphi_\alpha\circ\psi_1^{-1}):\psi_1(U_\alpha\cap V_1\cap V_2)\to\psi_2(U_\alpha\cap V_1\cap V_2)$ も C^∞ 級となる．$V_1\cap V_2=\bigcup_\alpha(U_\alpha\cap V_1\cap V_2)$ より (V_1,ψ_1)，(V_2,ψ_2) の座標変換は C^∞ 級である．

問題 21　$\mathcal{M}(\mathcal{S})$ に含まれない $\mathcal{S}$ を含むアトラス $\mathcal{T}$ があると仮定すると，座標近傍 (V,ψ) で $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ に含まれないものがとれるが，$\mathcal{T}$ は $\mathcal{S}$ を含むから，(V,ψ) と $\mathcal{S}$ の（共通部分が空でない）任意の座標近傍との座標変換は双方に C^∞ 級である．しかし，これは $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ の定義により，(V,ψ) が $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ に含まれることになるから矛盾である．よって $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ は $\mathcal{S}$ を含むアトラスの中で包含関係に関して最大のものである．

問題 22　$\mathcal{M}(\mathcal{S})=\mathcal{M}(\mathcal{T})$ が成り立つとき，$\mathcal{T}$ は $\mathcal{M}(\mathcal{T})$ に含まれるから，$\mathcal{T}$ は $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ にも含まれる．$\mathcal{M}(\mathcal{S})$ の定義により，$\mathcal{T}$ に属する任意の座標近傍に対し，$\mathcal{S}$ に属する（共通部分が空でない）任意の座標近傍との座標変換は C^∞ 級である．これより $\mathcal{S}\cup\mathcal{T}$ はアトラスになる．逆に，$\mathcal{S}\cup\mathcal{T}$ がアトラスのとき，問題 21 より $\mathcal{S}\cup\mathcal{T}$ は $\mathcal{S}$ を含むアトラスとして $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ に含まれる．$\mathcal{M}(\mathcal{S})$ に含まれるような任意のアトラス $\mathcal{U}$ に対し，$\mathcal{S}\cup\mathcal{U}$ はアトラスになる．問題 20 と同様に $\mathcal{T}\cup\mathcal{U}$ も $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ に含まれるアトラスとなることが分かる．このとき $\mathcal{T}\cup\mathcal{U}$ は $\mathcal{T}$ を含むアトラスとして $\mathcal{M}(\mathcal{T})$ に含まれる．よって $\mathcal{M}(\mathcal{S})\subset\mathcal{M}(\mathcal{T})$ が成り立つ．$\mathcal{M}(\mathcal{S})\supset\mathcal{M}(\mathcal{T})$ も同様に示せるので，$\mathcal{M}(\mathcal{S})=\mathcal{M}(\mathcal{T})$ となる．