幾何学 I　演習問題 No.13 略解

問題 146 与えられた微分同相写像は向きを $(-1)^{mn}$ 倍する．

問題 147 図を書いて考える．

問題 148 定義を理解する演習問題．(1) と (3) の関係については授業で説明した．

問題 149 M の正の局所座標を $(x_1, \ldots, x_m)$ し，t を $[0,1]$ の座標とする．$M \times [0,1]$ の正の局所座標は $(x_1, \ldots, x_m, t)$ で与えられる．従って順番を入れ替えて $(t, x_1, \ldots, x_{m-1}, (-1)^m x_m)$ も正の局所座標．このことから境界に入る向きは，$M \times \{1\}$ には M の向きの $(-1)^m$ 倍，$M \times \{0\}$ には M の向きの $(-1)^{m-1}$ 倍が入っている．

問題 150 問題 148 より，

$$M \text{ の向き} \iff M \text{ 上の至る所消えない } m\text{-form } \omega \text{ の同値類}$$

である．ただし $m = \dim M$．M は向き付け可能なので，M 上の至る所消えない m-form ω が存在する．M 上の至る所消えない m-form の同値類の集合が $[\omega]$, $[-\omega]$ の 2 つの元からなることを示せばよい．η を M 上の至る所消えない m-form とするとき，あるゼロでない関数 $f\colon M \to \mathbb{R}$ が存在して $\eta = f\omega$ が成立する．M の連結性から f は至る所正か，至る所負かのいずれかである．従って $[\eta] = [\omega]$ あるいは $[\eta] = [-\omega]$ である．

問題 151 $\phi(U \cap \partial\mathbb{H}^m) \subset V \cap \partial\mathbb{H}^m$ を示せばよい．(以下の議論において ϕ と ϕ^{-1} を取り換えると $\phi^{-1}(V \cap \partial\mathbb{H}^m) \subset U \cap \partial\mathbb{H}^m$，すなわち $V \cap \partial\mathbb{H}^m \subset \phi(U \cap \partial\mathbb{H}^m)$ も言える．) $p \in U \cap \partial\mathbb{H}^m$ をとり，$q = \phi(p)$ とする．$f = x_m \circ \phi^{-1}$ は V 上の C^∞ 級関数であり，非負実数に値を持つ．また $f(q) = 0$ であるので，f は q で最小値を持つ．ここで $q \notin \partial\mathbb{H}^m$ であれば，q は V の ($\mathbb{R}^m$ の位相に関する) 内点であるから，f の q での微分は 0 である．一方で $d_q f = d_p x_m \circ d_q(\phi^{-1})$ であり，ϕ^{-1} は微分同相であることから $d_q(\phi^{-1})$ は同型．また $d_p x_m \neq 0$．従って $d_q f \neq 0$．これは矛盾であり，$q \in \partial\mathbb{H}^m$ でなければならない．

ϕ が単に同相のときは，Brouwer の領域不変性 (invariance of domain) 定理を使えば主張が言える．

問題 152 沈め込みの局所座標表示からわかる．

問題 153 $p \in f^{-1}(x)$ に対して次の完全列がある

$$0 \to T_p f^{-1}(x) \to T_p M \xrightarrow{d_p f} T_x N \to 0$$

これから，$T_x N$ の向きと $T_p M$ の向きから $T_p f^{-1}(x)$ の向きが誘導されることが分かる．つまり，$m = \dim M$, $n = \dim N$ とするとき，$v_1, \ldots, v_{m-n} \in T_p f^{-1}(x)$ が正の基底であるのは，ある $v_{m-n+1}, \ldots, v_n \in T_p M$ が存在して，$v_1, \ldots, v_n$ が $T_p M$ の正の基底であり $d_p f(v_{m-n+1}), \ldots, d_p f(v_n)$ が $T_x N$ の正の基底になることとする．この向きが局所的には座標で与えられることを確かめることができ，従って $f^{-1}(x)$ は向き付け可能である．