幾何学 I　演習問題 No.12 略解

問題 133 略

問題 134 V の基底 $(v_1,\dots,v_n)$ の定める向きに対して $\bigwedge^n V$ の基底 $v_1\wedge\cdots\wedge v_n$ の定める向きを対応させる写像が well-defined であることを示せばよい．

またV の基底 $(v_1,\dots,v_n)$ の定める向きに対してその双対基底 $(v_1^*,\dots,v_n^*)$ の定める向きを対応させる写像が well-defined であることを示せばよい．同じ向きを与える別の基底 $(w_1,\dots,w_n)$ をとる．$w_j=\sum_i a_{i,j}v_i$ とすると $\det((a_{i,j})_{i,j})>0$ である．このとき $v_i^*=\sum_j a_{i,j}w_j^*$ であることが，w_j での値を見ることで分かる．したがって $(v_1^*,\dots,v_n^*)$ と $(w_1^*,\dots,w_n^*)$ は同じ向きを定める．

問題 135 線形写像 f を正の向きの基底に関して座標表示すると

$$(x_1,y_1,\dots,x_n,y_n)\mapsto(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)$$

なる形で与えられる．この写像は置換行列で表現され，f が向きを保つのはこの置換の符号が 1 であるときである．この置換の符号は $(-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+1}=(-1)^{n(n-1)/2}$ である．従って

$$f\text{ が向きを保つ}\iff n(n-1)/2\text{ が偶数}\iff n\equiv 0\text{ or }1\ (\mathrm{mod}4)$$

採点基準 1 点．置換の符号を求めて正しい条件を得ているかを見る．「$n(n-1)/2$ が偶数」と「$n\equiv 0,1$」のどちらでもよい．(あるいはこれ以外でも n に関する簡明な正しい条件になっていればよい．)

問題 136 局所有限被覆の定義から，X の各点 x に対して x の開近傍 U_x で $A_x=\{\alpha\in A: V_\alpha\cap U_x\neq\emptyset\}$ が有限集合であるものが存在する．X のコンパクト性から $X=U_{x_1}\cup\cdots\cup U_{x_m}$ とできる．このとき $V_\alpha\neq\emptyset$ であれば $V_\alpha\cap U_{x_i}\neq\emptyset$ なる i が存在する．従って $\alpha\in A_{x_i}$．すなわち α は有限集合 $A_{x_1}\cup\cdots\cup A_{x_m}$ に属する．

問題 137 $e_1,\dots,e_n$ を V の基底で $e_1^*,\dots,e_n^*$ の双対基底になるものとする．大文字 I,J により $I=(i_1<i_2<\cdots<i_k)$，$J=(j_1<j_2<\cdots<j_k)$ なる組を表すことにし，$e_J=(e_{j_1},\dots,e_{j_k})$ などとおく．このとき $\varphi_I(e_J)=\delta_{I,J}$ であることに注意しよう．まず φ_I たちが一次独立であることを見る．$\sum_I c_I\varphi_I=0$ であれば e_J での値を見て $c_J=0$ が分かる．よって φ_I は一次独立．次に φ_I たちが k 次反対称形式全体を生成することを見る．$\omega\colon V^k\to\mathbb{R}$ を反対称形式とする．$\omega=\sum_I\omega(e_I)\varphi_I$ であることを示せばよい．まず，両辺は e_J で同じ値を持つ．反対称性と多重線形性から，ω は全ての J に対する e_J での値 $\omega(e_J)$ から一意に決定されるため，等式が言える．

問題 138 $\omega=\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_k$，$\eta=\eta_1\wedge\cdots\wedge\eta_l$ のときに示せば十分である．(一般の ω,η はこのような形の元の和になり，示したい式の両辺は ω,η 各々について線形であるから．)

$\omega\wedge\eta$ は $\omega_1,\dots,\omega_k$ の置換について反対称，$\eta_1,\dots,\eta_l$ の置換について反対称であることに注意する．つまり $\omega\wedge\eta=\mathrm{sgn}(\tau)\,\mathrm{sgn}(\rho)\omega_{\tau(1)}\wedge\cdots\wedge\omega_{\tau(k)}\wedge\eta_{\rho(1)}\wedge\cdots\wedge\eta_{\rho(l)}$ が全ての $\tau\in S_k$，$\rho\in S_l$ について成立する．従って τ,ρ にわたってこれを平均化すると，

$$\omega\wedge\eta=\frac{1}{k!l!}\sum_{\tau\in S_k,\rho\in S_l}\mathrm{sgn}(\tau)\,\mathrm{sgn}(\rho)(\omega_{\tau(1)}\wedge\cdots\wedge\omega_{\tau(k)}\wedge\eta_{\rho(1)}\wedge\cdots\wedge\eta_{\rho(l)})$$

両辺を $(v_1, \ldots, v_{k+l}) \in V^{k+l}$ で評価すると，授業での定義より

$$
\begin{aligned}
(\omega \wedge \eta)(v_1, \ldots, v_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} &\sum_{\tau \in S_k, \rho \in S_l} \operatorname{sgn}(\tau) \operatorname{sgn}(\rho) \\
&\times \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma) \omega_{\tau(1)}(v_{\sigma(1)}) \cdots \omega_{\tau(k)}(v_{\sigma(k)}) \eta_{\rho(1)}(v_{\sigma(k+1)}) \cdots \eta_{\rho(l)}(v_{\sigma(k+l)})
\end{aligned}
$$

τ, ρ に関する和を実行すると，示したい式の右辺になっている．

問題 139 略

問題 140 (1) 与式の右辺において X_l を fX_l, $f \in C^\infty(U)$ に取り換えたものは

$$
\begin{aligned}
&\sum_{1 \le i \le k+1, i \ne l} (-1)^{i-1} X_i (f \omega(X_1, \ldots, \check{X}_i, \ldots X_{k+1})) \\
&+ (-1)^{l-1} f X_l \omega(X_1, \ldots, \check{X}_l, \ldots, X_{k+1}) \\
&+ \sum_{1 \le i < j \le k+1, i \ne l, j \ne l} (-1)^{i+j} f \omega([X_i, X_j], X_1, \ldots, \check{X}_i, \ldots \check{X}_j, \ldots, X_{k+1}) \\
&+ \sum_{1 \le i = l < j \le k+1} (-1)^{i+j} \omega([fX_i, X_j], X_1, \ldots, \check{X}_i, \ldots, \check{X}_j, \ldots, X_{k+1}) \\
&+ \sum_{1 \le i < j = l \le k+1} (-1)^{i+j} \omega([X_i, fX_j], X_1, \ldots, \check{X}_i, \ldots, \check{X}_j, \ldots, X_{k+1})
\end{aligned}
$$

Leibniz ルールより，この式は元の右辺の f 倍に次を加えたものである．

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1, i \ne l}^{k+1} (-1)^{i-1} X_i(f) \omega(X_1, \ldots, \check{X}_i, \ldots, X_{k+1}) \\
&+ \sum_{l = i < j} (-1)^{i+j} (-X_j(f)) \omega(X_i, X_1, \ldots, \check{X}_i, \ldots, \check{X}_j, \ldots, X_{k+1}) \\
&+ \sum_{i < j = l} (-1)^{i+j} X_i(f) \omega(X_j, X_1, \ldots, \check{X}_i, \ldots, \check{X}_j, \ldots, X_{k+1})
\end{aligned}
$$

第 2 項・第 3 項は反対称性を使って ω の引数の順番を入れ替えると

$$
\sum_{l<j} (-1)^j X_j(f) \omega(X_1, \ldots, \check{X}_j, \ldots, X_{k+1}) + \sum_{i<l} (-1)^i X_i(f) \omega(X_1, \ldots, \check{X}_i, \ldots, X_{k+1})
$$

と等しく，これは第 1 項とキャンセルする．以上の計算より右辺は X_l について $C^\infty(U)$ 線形である．

(2) 隣接互換を行ったときに符号が変わることを示せばよい．与式の右辺を第 1 項と第 2 項に分けて考える．

$$
\begin{aligned}
\text{第 1 項} &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} X_i \omega(X_1, \ldots, \check{X}_i, \ldots, X_{k+1}) \\
\text{第 2 項} &= \sum_{1 \le i < j \le k+1} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \ldots, \check{X}_i, \ldots \check{X}_j, \ldots, X_{k+1})
\end{aligned}
$$

第 1 項で X_l と X_{l+1} を入れ替えるとき，

(a) $i \notin \{l, l+1\}$ の項は (-1) 倍される．

(b) $i = l$ の項は $i = l+1$ の項の (-1) 倍になる．

(c) $i = l+1$ の項は $i = l$ の項の (-1) 倍になる．

より第 1 項は全体として (-1) 倍されることが分かる．

同様に，第 2 項で X_l と X_{l+1} を入れ替えるとき，

(a) $\{i, j\} \cap \{l, l+1\} = \emptyset$ の項は (-1) 倍される．

(b) $i = l,\, j \notin \{l, l+1\}$ の項は $i = l+1,\, j \notin \{l, l+1\}$ の項の (-1) 倍となる．

(c) $i = l+1,\, j \notin \{l, l+1\}$ の項は $i = l,\, j \notin \{l, l+1\}$ の項の (-1) 倍となる．

(d) $i \notin \{l, l+1\},\, j = l$ の項は $i \notin \{l, l+1\},\, j = l+1$ の項の (-1) 倍となる．

(e) $i \notin \{l, l+1\},\, j = l+1$ の項は $i \notin \{l, l+1\},\, j = l$ の項の (-1) 倍となる．

(f) $i = l,\, j = l+1$ の項は (-1) 倍される．

より，第 2 項も全体として (-1) 倍されることが分かる．

以上より右辺で X_l, X_{l+1} を入れ替えると (-1) 倍される．

(3) $\omega = \sum_{j_1 < \cdots < j_k} \omega_{j_1, \ldots, j_k}(x) dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k}$ とおく．このとき

$$\begin{aligned}
d\omega &= \sum_{l} \sum_{j_1 < \cdots < j_k} \frac{\partial \omega_{j_1, \ldots, j_k}}{\partial x_l} dx_l \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k} \\
&= \sum_{a=0}^{k} (-1)^a \sum_{j_1 < \cdots < j_k} \sum_{j_a < l < j_{a+1}} \frac{\partial \omega_{j_1, \ldots, j_k}}{\partial x_l} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_a} \wedge dx_l \wedge dx_{j_{a+1}} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k}
\end{aligned}$$

であるから，添え字の列 $i_1 < i_2 < \cdots < i_{k+1}$ に対して

$$d\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{i_{k+1}}}\right) = \sum_{a=1}^{k+1} (-1)^{a-1} \frac{\partial \omega_{i_1, \ldots, \widehat{i_a}, \ldots, i_{k+1}}}{\partial x_{i_a}}$$

これは右辺第 1 項の $X_1 = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \ldots, X_{k+1} = \frac{\partial}{\partial x_{i_{k+1}}}$ での値と等しい．またこのとき $[X_i, X_j] = 0$ ゆえ，右辺第 2 項は消えている．従って $X_1 = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \ldots, X_{k+1} = \frac{\partial}{\partial x_{i_{k+1}}}$, $i_1 < \cdots < i_{k+1}$ のときに与えられた等式が成立する．

U は座標近傍なので，任意のベクトル場は $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m}$ の $C^\infty(U)$ 係数の一次結合で表される．左辺は $C^\infty(U)$ 上多重線形かつ反対称，右辺も $C^\infty(U)$ 上多重線形かつ反対称であることから，一般の $X_1, \ldots, X_{k+1} \in \mathfrak{X}(U)$ に対して等式が成立することが結論される．

採点基準　3 点．各小問を 1 点づつとする．かなり細かい議論になるので，ある程度甘めに見て，この解答ほど詳細が書かれていなくても状況を理解していて重要なポイントが議論されていれば点数を与えたい．例えば，(1) では f を微分する項を計算し，それがキャンセルすることが言及されているかどうか，(2) では第 1 項と第 2 項が各々(-1) 倍されることが言及されているかどうか，(3) では $d\omega(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{i_k}})$ が正しく計算されていれば点数を与えてよい．(このパターンに当てはまらない解答は個別に判断する．) 軽微なミスは減点しない．

問題 141 (1) 局所座標を使って $X_i = \sum_{j=1}^m f_{i,j}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$ と書けるとする．仮定から $(f_{i,j}(x))$ は正則行列に値を持つ C^∞ 級関数である．このとき $\theta_i = \sum_{j=1}^m g_{i,j}(x)dx_j$ とおくと $(g_{i,j})$ は $(f_{i,j})$ の転置の逆行列であり，従って $g_{i,j}(x)$ は C^∞ 級．

(2) 問題 140 の公式を使うと，

$$d\theta_i(X_j, X_k) = X_j\theta_i(X_k) - X_k\theta_i(X_j) - \theta_i([X_j, X_k]) = -a_{j,k,i}$$

一方で問題 138 の公式および性質 $a_{j,k,i} = -a_{k,j,i}$ から，

$$\frac{1}{2}\sum_{j',k'} a_{j',k',i}\,(\theta_{j'} \wedge \theta_{k'})(X_j, X_k) = \frac{1}{2}(a_{j,k,i} - a_{k,j,i}) = a_{j,k,i}.$$

$\{X_i\}$ は各点で基底をなしているから，以上より示された．

問題 142 メビウスの帯 M に C^∞ 級多様体の構造を導入する．M が Hausdorff 位相空間であることの証明は省略する．$\pi\colon [0,1]\times(-1,1) \to M$ を射影とし，2 つの座標系 $(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)$ を以下のように定める．

- $U_1 = \pi((0,1) \times (-1,1))$，$\varphi_1\colon U_1 \to (0,1) \times (-1,1)$, $\varphi_1(\pi(x,y)) = (x,y)$.
- $U_2 = \pi(\{(x,y) \in [0,1] \times (-1,-1) : x \neq 1/2\}$，$\varphi_2\colon U_2 \to (0,1) \times (-1,1)$ は

$$\varphi_2(\pi(x,y)) = \begin{cases} (x+\frac{1}{2}, -y) & 0 \leq x < 1/2 \\ (x-\frac{1}{2}, y) & 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

とおく．φ_1, φ_2 が同相写像であること，また座標変換が C^∞ 級であることは省略する．

一般に向きづけられた多様体 M で次の事実が成り立つ．

> $(U; x_1, \ldots, x_m)$ を連結な座標近傍とする．ある一点 $p \in U$ において $(\frac{\partial}{\partial x_1})_p, \ldots, (\frac{\partial}{\partial x_m})_p$ が T_pM の向きを与えているとすると，任意の点 $q \in U$ に対して $(\frac{\partial}{\partial x_1})_q, \ldots, (\frac{\partial}{\partial x_m})_q$ は T_qM の向きを与える．

この事実を認めてメビウスの帯 M が向きづけ可能ではないことを示そう．M が向きづけられているとする．上の事実を用いると U_1, U_2 は連結であるから φ_1, φ_2 は正の座標系であるか負の座標系であるかのいずれかである．従って座標変換 $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ のヤコビアンは（連結成分によらず）常に正か常に負でなければならない．一方 $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ は集合

$$\varphi_1(U_1 \cap U_2) = \{(x,y) \in (0,1) \times (-1,1) : x \neq 1/2\}$$

上で定義され，次で与えられる：

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(x,y) = \begin{cases} (x+\frac{1}{2}, -y) & 0 < x < 1/2 \\ (x-\frac{1}{2}, y) & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

従って座標変換は $0 < x < 1/2$ の領域においてヤコビアンが負，$1/2 < x < 1$ の領域においてヤコビアンが正となる．これは上に述べたことと矛盾する．

事実の証明：基底 $(\frac{\partial}{\partial x_1})_p, \ldots, (\frac{\partial}{\partial x_m})_p$ は与えられた T_pM の向きと一致するか，一致しないかのいずれかである．向きが一致する点 p のなす部分集合を U_1, 一致しない点 p のなす部分集合を U_2 とする．$U = U_1 \sqcup U_2$ であり $U_1 \neq \varnothing$ である．$p \in U_1$ をとる．多様体の向きづけの定義により p の近傍 $V \subset U$ および V 上の座標系 $(y_1, \ldots, y_m)$ が存在して全ての点

$q \in V$ に対して $(\frac{\partial}{\partial y_1})_q, \ldots, (\frac{\partial}{\partial y_m})_q$ は T_qM の向きを与える．必要ならば点 p を含む連結成分をとることで V は連結と仮定してよい．ヤコビアン

$$\frac{\partial(x_1, \ldots, x_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)}$$

は V 上のいたるところ消えない連続関数であり，また点 p で正である．従って V の連結性からこのヤコビアンは V 上いたるところ正である．すなわち $(\frac{\partial}{\partial x_1})_q, \ldots, (\frac{\partial}{\partial x_m})_q$ は全ての点 $q \in V$ に対して T_qM の向きを与える．従って $V \subset U_1$．以上の議論は U_1 が開集合であることを示している．同様にして U_2 も開集合である．U は連結と仮定していたので，$U_1 = U$, $U_2 = \varnothing$. 以上で事実が証明された．