幾何学 I　演習問題 No.11 略解

問題 123

$$
\begin{aligned}
((g\circ f)^*\alpha)_p &= \alpha_{g\circ f(p)} \circ d_p(g\circ f)\\
&= \alpha_{g(f(p))} \circ d_{f(p)} g \circ d_p f\\
&= (g^*\alpha)_{f(p)} \circ d_p f = (f^*(g^*\alpha))_p
\end{aligned}
$$

問題 124　(1) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ より

$$
xdy - ydx = r\cos\theta\, d(r\sin\theta) - r\sin\theta\, d(r\cos\theta) = r^2 d\theta.
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\varphi^*(dy\wedge dz) &= d(\varphi^*(y))\wedge d(\varphi^*(z))\\
&= d(xy)\wedge d(xyz)\\
&= (xdy + ydx)\wedge(yzdx + xzdy + xydz)\\
&= xy^2 dx\wedge dz + x^2 y dy\wedge dz
\end{aligned}
$$

(3)

$$
d\alpha = \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right) dy\wedge dz + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right) dz\wedge dx + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\wedge dy
$$

$d\alpha$ は rotation の計算に対応することに注意しよう．

(4)

$$
d\beta = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right) dx\wedge dy\wedge dz
$$

$d\beta$ は divergence の計算に対応することに注意しよう．

(5)

$$
\omega\wedge\omega\wedge\omega = 6dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3\wedge dx_4\wedge dx_5\wedge dx_6
$$

採点基準　計 3 点．(1)-(2) が両方できて 1 点，(3)-(4) が両方できて 1 点，(5) ができて 1 点．正しく計算できていればよい．[(3)-(4) については座標表示まで求めてもらうことを意図しているが，df のまま残している解答も間違いではないので減点しない．] 最後の答えを書き写すときのミス等，極めて軽微なミスについては減点しなくてもよい．

問題 125 $e_1,\dots,e_n$ を V の基底とする．授業では

$$
\bigwedge^k V = \bigoplus_{i_1<\cdots<i_k} \mathbb{R}\, e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_k}
$$

と定めたのであった．もし問題の性質を満たすような $\tilde\varphi$ が存在すれば，可換図式から $i_1 < \cdots < i_k$ に対して $\tilde\varphi(e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_k}) = \varphi(e_{i_1},\dots,e_{i_k})$ である．このことから $\tilde\varphi$ は存在すれば一意的に決まることが分かる．次に $\tilde\varphi$ を基底 $e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_k}$ $(i_1<\cdots<i_k)$ を $\varphi(e_{i_1},\dots,e_{i_k})\in W$ に送る線形写像として定めたときに，問題にある可換図式を満たすことを示す．まず (単調増加とは限らない) 任意の組 $(j_1,\dots,j_k)\in\{1,\dots,n\}^k$ に対して

$$
\varphi(e_{j_1},\dots,e_{j_k}) = \tilde\varphi(e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_k})
$$

であることに注意しておく．これは φ の反対称性から明らかである．任意の $v_1,\dots,v_k\in V$ に対して $v_i=\sum_{j=1}^n a_{i,j}e_j$ とおくとき，

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(v_1\wedge\cdots\wedge v_k)&=\sum_{j_1=1}^n\cdots\sum_{j_k=1}^n a_{1,j_1}\cdots a_{k,j_k}\tilde{\varphi}(e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_k})\\&=\sum_{j_1=1}^n\cdots\sum_{j_k=1}^n a_{1,j_1}\cdots a_{k,j_k}\varphi(e_{j_1},\dots,e_{j_k})=\varphi(v_1,\dots,v_k).\end{aligned}$$

以上により示された．

問題 126 写像 $V^k\to\bigwedge^k W$，$(v_1,\dots,v_k)\mapsto f(v_1)\wedge\cdots\wedge f(v_k)$ が多重線形性と反対称性を満たすことをチェックすればよい．

問題 127 φ の逆写像は $\varphi^{-1}(x,y)=(\frac{2x}{1+x^2+y^2},\frac{2y}{1+x^2+y^2},\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1})$ であたえられた．与えられた問題は $(\varphi^{-1})^*\alpha$ を求めることである．

$$\begin{aligned}(\varphi^{-1})^*\alpha&=(\varphi^{-1})^*(xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy)\\&=\frac{2x}{1+x^2+y^2}d\left(\frac{2y}{1+x^2+y^2}\right)\wedge d\left(\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right)\\&\quad+\frac{2y}{1+x^2+y^2}d\left(\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right)\wedge d\left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}\right)\\&\quad+\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}d\left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}\right)\wedge d\left(\frac{2y}{1+x^2+y^2}\right)\end{aligned}$$

であるが，

$$d\left(\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right)=d\left(1-\frac{2}{x^2+y^2+1}\right)=-2d\left(\frac{1}{x^2+y^2+1}\right)$$

より

$$\begin{aligned}d\left(\frac{2y}{1+x^2+y^2}\right)\wedge d\left(\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right)&=\left(\frac{2dy}{1+x^2+y^2}+2yd\left(\frac{1}{1+x^2+y^2}\right)\right)\wedge d\left(\frac{-2}{x^2+y^2+1}\right)\\&=(-2)\frac{2dy}{1+x^2+y^2}\wedge d\left(\frac{1}{x^2+y^2+1}\right)\\&=\frac{4dy\wedge(2xdx+2ydy)}{(1+x^2+y^2)^3}=\frac{-8xdx\wedge dy}{(1+x^2+y^2)^3}\end{aligned}$$

同様に

$$d\left(\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right)\wedge d\left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}\right)=\frac{-8ydx\wedge dy}{(1+x^2+y^2)^3}$$

また

$$\begin{aligned}&d\left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}\right)\wedge d\left(\frac{2y}{1+x^2+y^2}\right)\\&\quad=\left(\frac{2dx}{1+x^2+y^2}-\frac{2x(2xdx+2ydy)}{(1+x^2+y^2)^2}\right)\wedge\left(\frac{2dy}{1+x^2+y^2}-\frac{2y(2xdx+2ydy)}{(1+x^2+y^2)^2}\right)\\&\quad=\frac{4dx\wedge dy}{(1+x^2+y^2)^2}-\frac{8y^2dx\wedge dy}{(1+x^2+y^2)^3}-\frac{8x^2dx\wedge dy}{(1+x^2+y^2)^3}\\&\quad=\frac{4(1-x^2-y^2)}{(1+x^2+y^2)^3}dx\wedge dy\end{aligned}$$

以上の計算を合わせて

$$
\begin{aligned}
(\varphi^{-1})^*\alpha &= \left(\frac{-16x^2}{(1+x^2+y^2)^4} + \frac{-16y^2}{(1+x^2+y^2)^4} - \frac{4(x^2+y^2-1)^2}{(1+x^2+y^2)^4} \right) dx \wedge dy \\
&= \frac{-4dx \wedge dy}{(1+x^2+y^2)^2}
\end{aligned}
$$

が得られる．

採点基準 　1 点．最終計算結果が正しくなければ 0 点．最終の結果として書かれた式が正しいがきれいな形になっていない場合，分母分子を約分してこの答が得られる程度 (例えば分母が $(1+x^2+y^2)^4$ で分子に $(1+x^2+y^2)^2$ を展開したものが現れるなど) であれば減点しない．結果が正しくても計算途中とみなされるような答え (例えば通分していない，$dx \wedge dy$ と $dy \wedge dx$ をまとめていない，など) は 0 点とする．

問題 128 $df_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j$ である．外積の多重線形性を使って $df_1 \wedge \cdots \wedge df_k$ を展開し，さらに反対称性を用いて基底 $dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$, $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ の線形結合としてあらわすことを考える．このとき $dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ の係数は,

$$
\mathrm{sgn}(\sigma) \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_{\sigma(1)}}} \cdots \frac{\partial f_k}{\partial x_{i_{\sigma(k)}}}
$$

を全ての k 次の置換 σ にわたってたしあげたものである．このことから主張は明らかである．

問題 129 $p \in M$ をとる．$(\varphi^*\alpha)_p$ は $\alpha_{\varphi(p)} \in \bigwedge^k T^*_{\varphi(p)}N$ を $d_p\varphi\colon T_pM \to T_{\varphi(p)}N$ の誘導する線形写像 $(d_p\varphi)^*\colon \bigwedge^k T^*_{\varphi(p)}N \to \bigwedge^k T^*_pM$ によって写した像である．

$$
\begin{aligned}
(\varphi^*\alpha)_p = (d_p\varphi)^*\alpha_{\varphi(p)} &= \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \alpha_{i_1,\ldots,i_k}(\varphi(p))(d_p\varphi)^*(dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}) \\
&= \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \alpha_{i_1,\ldots,i_k}(\varphi(p))(d_p\varphi)^*(dy_{i_1}) \wedge \cdots \wedge (d_p\varphi)^*(dy_{i_k})
\end{aligned}
$$

ここで $(d_p\varphi)^*dy_{i_a} = \varphi^*(dy_{i_a}) = d(\varphi^*y_{i_a}) = d\varphi_{i_a}$ に注意すると，これは

$$
\sum_{i_1 < \cdots < i_k} \alpha_{i_1,\ldots,i_k}(\varphi(p)) d\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi_{i_k}
$$

前問の結果を使って座標表示すれば,

$$
\varphi^*\alpha = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \sum_{j_1 < \cdots < j_k} \alpha_{i_1,\ldots,i_k}(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_k})}{\partial(x_{j_1}, \ldots, x_{j_k})} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k}
$$

この表示から「α が C^∞ 級 $\Longrightarrow$ $\varphi^*\alpha$ が C^∞ 級」は明らか.

問題 130 一意性はほぼ明らかである．実際 $\omega = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k \in \bigwedge^k V^*$, $\omega_i \in V^*$ に対して

$$
i(v)\omega = \sum_{l=1}^k (-1)^{l-1} \omega_l(v) \cdot \omega_1 \wedge \cdots \wedge \check{\omega}_l \wedge \cdots \wedge \omega_k
$$

となることが性質 (1), (2) からすぐわかる．逆に $e_1, \ldots, e_n$ を V の基底，$e_1^*, \ldots, e_n^*$ を V^* の双対基底とし,

$$
i(v)(e_{j_1}^* \wedge \cdots e_{j_k}^*) := \sum_{l=1}^k (-1)^{l-1} e_{j_l}^*(v) \cdot e_{j_1} \wedge \cdots \wedge \check{e}_{j_l} \wedge \cdots \wedge e_{j_k}
$$

と定めて $\bigwedge^k V^*$ 全体に線形に拡張するとき，性質 (1), (2) を満たすことを示せばよい.