幾何学 I　演習問題 No.10 略解

問題 110 $c(t)$ の微分方程式は次で与えられる．

$$\frac{dc_i(t)}{dt} = X_i(c_1(t),\ldots,c_m(t))$$

従って $c_i(0)=a_i$ を用いて

$$\frac{dc_i}{dt}(0) = X_i(a_1,\ldots,a_m)$$
$$\frac{d^2c_i}{dt^2}(t) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial X_i}{\partial x_j}(c_1(t),\ldots,c_m(t))\frac{dc_j}{dt}(t) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial X_i}{\partial x_j}(c_1(t),\ldots,c_m(t))X_j(c_1(t),\ldots,c_m(t))$$

ゆえ

$$\frac{d^2c_i}{dt^2}(0) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial X_i}{\partial x_j}(a_1,\ldots,a_m)X_j(a_1,\ldots,a_m)$$

従って Taylor 展開を t の 2 次まで与えると，

$$c_i(t) = a_i + X_i(a_1,\ldots,a_m)t + \sum_{j=1}^m \frac{\partial X_i}{\partial x_j}(a_1,\ldots,a_m)X_j(a_1,\ldots,a_m)\frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

問題 111 (1) 1 パラメータ変換群であることを示すには，$\varphi_{\theta_1+\theta_2}=\varphi_{\theta_1}\circ\varphi_{\theta_2}$, $\varphi_0=\mathrm{id}$ を示せばよいがこれは容易である．対応するベクトル場は

$$\begin{aligned}\left.\frac{d}{d\theta}\varphi_\theta(x,y)\right|_{\theta=0} &= \left.\frac{d}{d\theta}(x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)\right|_{\theta=0}\\ &= \left.(-x\sin\theta - y\cos\theta)\frac{\partial}{\partial x} + (x\cos\theta - y\sin\theta)\frac{\partial}{\partial y}\right|_{\theta=0}\\ &= -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}.\end{aligned}$$

(2) 定義に基づいて $(\varphi_\theta)_*(x\frac{\partial}{\partial x})$ の点 $p=(x_0,y_0)$ での値を計算する．

$$\begin{aligned}\left((\varphi_\theta)_*\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)_p &= (d_{\varphi_\theta^{-1}(p)}\varphi_\theta)\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)_{\varphi_\theta^{-1}(p)}\\ &= (d_{\varphi_\theta^{-1}(p)}\varphi_\theta)\left[x(\varphi_\theta^{-1}(p))\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{\varphi_\theta^{-1}(p)}\right]\end{aligned}$$

φ_θ は線形写像であるから，$d_{\varphi_\theta^{-1}(p)}\varphi_\theta$ は (基底 $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ に関して) φ_θ の表現行列と同じ行列で表現される線形写像である．従って

$$\begin{aligned}&= (x_0\cos\theta + y_0\sin\theta)\left(\cos\theta\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + \sin\theta\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p\right)\\ &= (x_0\cos^2\theta + y_0\cos\theta\sin\theta)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + (x_0\cos\theta\sin\theta + y_0\sin^2\theta)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p\end{aligned}$$

従って

$$
\begin{aligned}
(\varphi_\theta)_*\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right) &= (x\cos^2\theta + y\cos\theta\sin\theta)\frac{\partial}{\partial x} + (x\cos\theta\sin\theta + y\sin^2\theta)\frac{\partial}{\partial y} \\
&= \frac{1}{2}\left((x(1+\cos 2\theta) + y\sin 2\theta)\frac{\partial}{\partial x} + (x\sin 2\theta + y(1-\cos 2\theta))\frac{\partial}{\partial y}\right)
\end{aligned}
$$

(3) **(解 1)**: (2) の計算結果から

$$
\frac{d}{d\theta}(\varphi_{-\theta})_*\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)\bigg|_{\theta=0} = -y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}.
$$

である．

(解 2): (1) より φ_θ はベクトル場 $-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ の生成する 1 パラメータ変換群である．従って求めるものはこのベクトル場による Lie 微分であり，それはベクトル場の交換子積で与えられる．

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{d\theta}(\varphi_{-\theta})_*\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)\bigg|_{\theta=0} &= \mathcal{L}_{-y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y}}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right) \\
&= \left[-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial x}\right] \\
&= -y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{採点基準}}$ 各小問 1 点で計 3 点．(1) は 1 パラメータ変換群の条件 $\varphi_{\theta_1+\theta_2} = \varphi_{\theta_1}\circ\varphi_{\theta_2}$, $\varphi_0 = \mathrm{id}$ が述べられており (述べているだけで十分)，対応するベクトル場が正しく計算されていればよい．(2) は定義に従って正しく計算できているかどうか (倍角公式で書きなおす必要はない)，(3) は正しく計算できているかどうかを見る．

問題 112 点 $q \in Q$ での両辺の値を比べる．$\varphi_1^{-1}(q) = p \in N$, $\varphi_2^{-1}(p) = r \in M$ とおくとき，

$$
\begin{aligned}
((\varphi_2\circ\varphi_1)_*X)_q &= d_r(\varphi_2\circ\varphi_1)(X_r) \\
&= d_p\varphi_2(d_r\varphi_1(X_r)) \\
&= d_p\varphi_2(\varphi_{1*}X)_p \\
&= (\varphi_{2*}(\varphi_{1*}X))_q
\end{aligned}
$$

問題 113 $\theta = \arctan(y/x)$ より

$$
d\theta = \frac{1}{1+(y/x)^2}d(y/x) = \frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{xdy - ydx}{x^2} = \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}
$$

問題 114 $p \in M$, $q \in N$, $\varphi(p) = q$ とし，点 p の周りの座標近傍 $(U; x_1, \ldots, x_m)$, 点 q の周りの座標近傍 $(V; y_1, \ldots, y_m)$ とする．φ は微分同相なので $\varphi(U) = V$ としてよい．(U を $U\cap\varphi^{-1}(V)$ で置き換え，V を $V\cap\varphi(U)$ で置き換えればよい．) これら二つのチャートに関する φ の座標表示を

$$
y_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_m)
$$

とし，逆写像の座標表示を

$$
x_i = (\varphi^{-1})_i(y_1, \ldots, y_m)
$$

とする．また $X = \sum_{i=1}^{m} X_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$ を X の U 上での座標表示とする．このとき

$$\begin{aligned}(\varphi_* X)_y &= (d_{\varphi^{-1}(y)}\varphi) X_{\varphi^{-1}(y)} \\ &= (d_{\varphi^{-1}(y)}\varphi) \sum_{i=1}^{m} X_i(\varphi^{-1}(y)) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{\varphi^{-1}(y)} \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} X_i(\varphi^{-1}(y)) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\varphi^{-1}(y)) \left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_y\end{aligned}$$

ここで $\varphi^{-1}(y)$ は正確には $((\varphi^{-1})_1(y_1,\dots,y_m),\dots,(\varphi^{-1})_m(y_1,\dots,y_m))$ である．この座標表示から $\varphi_* X$ は C^∞ 級ベクトル場．

問題 115 $\varphi\colon M \to N$ を C^∞ 級写像とする．ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して押し出し $\varphi_* X$ を定義したいとすると，それは次の性質をもつべきである．

$$(\varphi_* X)_{\varphi(p)} = d_p\varphi(X_p)$$

ここで，もし φ が単射でなければ $\varphi(p_1) = \varphi(p_2)$, $p_1 \neq p_2$ を満たす 2 点 $p_1, p_2 \in M$ が存在することになるが，$d_{p_1}\varphi(X_{p_1})$, $d_{p_2}\varphi(X_{p_2})$ は一般には異なるため，定義が well-defined ではない．

また，φ が全射でなければ，φ の像に入らない点 $q \in N$ に対して $(\varphi_* X)_q$ をどのように定めればよいか不定性が残る．

問題 116 $\varphi\colon M \to N$ が微分同相のとき，ベクトル場を C^∞ 級関数への作用素とみなすと，$\varphi_* X = (\varphi^*)^{-1} \circ X \circ \varphi^*$ が成り立つことを使えば直ちに従う．

$\varphi\colon M \to N$ が一般の C^∞ 級写像のとき．$X \in \mathfrak{X}(M)$ と $X' \in \mathfrak{X}(N)$ が φ で関係しており，$Y \in \mathfrak{X}(M)$ と $Y' \in \mathfrak{X}(N)$ が φ で関係しているとき $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$ と $[X', Y'] \in \mathfrak{X}(N)$ が φ で関係する．これもベクトル場を関数への作用素と思ったときの関係式 $\varphi^* \circ X' = X \circ \varphi^*$, $\varphi^* \circ Y' = Y \circ \varphi^*$ から直ちに従う．

問題 118 (余り厳密ではない説明 1)　局所座標 $(x^1, \dots, x^m)$ で表示したとき，各点 x に対して

$$\psi_s^i(\varphi_t(x)) - \varphi_t^i(\psi_s(x)) \approx st[X, Y]^i(x)$$

となることを説明しよう．ここで上付きの添え字 i は座標表示の i 成分を表す．(ベクトル場 $[X, Y]$ については，基底 $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ で展開したときの i 番目の成分である．) s, t が非常に小さいとき，flow φ_t, ψ_s は Taylor 展開より次の式で近似される．

$$\varphi_t^i(x) \approx x^i + tX^i(x), \qquad \psi_s^i(x) \approx x^i + sY^i(x)$$

従って

$$\begin{aligned}\psi_s^i(\varphi_t(x)) &\approx \varphi_t^i(x) + sY^i(\varphi_t(x)) \approx x^i + tX^i(x) + sY^i(x + tX(x)) \\ &\approx x^i + tX^i(x) + sY^i(x) + st(\partial_X Y^i)(x) \\ \varphi_t^i(\psi_s(x)) &\approx \psi_s^i(x) + tX^i(\psi_s(x)) \approx x^i + sY^i(x) + tX^i(x + sY(x)) \\ &\approx x^i + sY^i(x) + tX^i(x) + st(\partial_Y X^i)(x)\end{aligned}$$

ただし，$(\partial_X Y^i)(x) = \sum_{j=1}^{m} X^j(x)(\partial_{x^j} Y^i)(x)$ 等は X 方向への方向微分を表す．以上より

$$\psi_s^i(\varphi_t(x)) - \varphi_t^i(\psi_s(x)) \approx st((\partial_X Y^i)(x) - (\partial_Y X^i)(x)) = st[X, Y]^i(x)$$

(もう少し正確な説明 2) 上の計算では Taylor 展開の 2 次の項までを見ているので，正確には $\varphi_t(x)$，$\psi_s(x)$ の Taylor 展開の 2 次までを見ないといけない．つまり問題 110 にあるように

$$\varphi_t^i(x) \approx x^i + tX^i(x) + \frac{t^2}{2}\partial_X X^i(x), \qquad \psi_s^i(x) \approx x^i + sY^i(x) + \frac{s^2}{2}\partial_Y Y^i(x)$$

と展開して，以上と同様に (Taylor 展開の 2 次までを) 計算すると，

$$\begin{aligned}
\psi_s^i(\varphi_t(x)) &\approx \varphi_t^i(x) + sY^i(\varphi_t(x)) + \frac{s^2}{2}(\partial_Y Y^i)(\varphi_t(x)) \\
&\approx x^i + tX^i(x) + sY^i(x) + \frac{t^2}{2}(\partial_X X^i)(x) + st(\partial_X Y^i)(x) + \frac{s^2}{2}(\partial_Y Y^i)(x) \\
\varphi_t^i(\psi_s(x)) &\approx \psi_s^i(x) + tX^i(\psi_s(x)) + \frac{t^2}{2}(\partial_X X^i)(\psi_s(x)) \\
&\approx x^i + sY^i(x) + tX^i(x) + \frac{t^2}{2}(\partial_X X^i)(x) + st(\partial_Y X^i)(x) + \frac{s^2}{2}(\partial_Y Y^i)(x)
\end{aligned}$$

となって結果は同じである．

(数学的に厳密な説明 3)　与えられた近似式を次のように解釈する．任意の x の近傍で定義された任意の C^∞ 級関数 f に対して $(s,t) \to (0,0)$ のとき，

$$f(\psi_s(\varphi_t(x)) - f(\varphi_t(\psi_s(x))) = st([X,Y]f)(x) + o(s^2+t^2)$$

が成立する．つまり，右辺は左辺の (s,t) に関する 2 次までの Taylor 展開になっている．s,t が十分小さいとき，$f(\varphi_t(\psi_s(x)))$, $f(\psi_s(\varphi_t(x)))$ は意味をもち，(s,t) の C^∞ 級関数になることに注意したい．上の説明 1・2 は f が座標関数 x^i であるときの特別の場合になっている．

$$\left.\frac{\partial}{\partial s} f(\psi_s(\varphi_t(x)))\right|_{s=0} = (Yf)(\varphi_t(x))$$

であるから

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s} f(\psi_s(\varphi_t(x)))\right|_{s=t=0} = (X(Yf))(x)$$

が言える．同様にして

$$\left.\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t} f(\varphi_t(\psi_s(x)))\right|_{s=t=0} = (Y(Xf))(x)$$

が言える．従って

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial t \partial s}(f(\psi_s(\varphi_t(x))) - f(\varphi_t(\psi_s(x))))\right|_{s=t=0} = ([X,Y]f)(x)$$

である．また

$$\left. f(\psi_s(\varphi_t(x))) - f(\varphi_t(\psi_s(x)))\right|_{s=0} = 0$$

であるから

$$\left.\frac{\partial^k}{\partial t^k}\left(f(\psi_s(\varphi_t(x))) - f(\varphi_t(\psi_s(x)))\right)\right|_{s=t=0} = 0, \qquad \forall k \geq 0$$

が言える．同様にして

$$\left.\frac{\partial^k}{\partial s^k}\left(f(\psi_s(\varphi_t(x))) - f(\varphi_t(\psi_s(x)))\right)\right|_{s=t=0} = 0, \qquad \forall k \geq 0$$

が言える．これらの計算から上の Taylor 展開が従う．

問題 119 $\widehat{\mathbb{C}}$ の ∞ のまわりの座標を $w = s + \sqrt{-1}t$ とおく．$z = x + \sqrt{-1}y$ と $w = s + \sqrt{-1}t$ は座標変換 $w = 1/z$ により関係している．

$$x + \sqrt{-1}y = \frac{1}{s + \sqrt{-1}t} = \frac{s}{s^2 + t^2} - \sqrt{-1}\frac{t}{s^2 + t^2}$$

与えられた 1-form α は座標 (x, y) について明らかに C^∞ 級である．α を座標 (s, t) で表示すると，$(s, t) \neq (0, 0)$ のとき，

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{dx}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{d\left(\frac{s}{s^2+t^2}\right)}{(1 + (\frac{s}{s^2+t^2})^2 + (\frac{-t}{s^2+t^2})^2)^2} \\
&= (s^2 + t^2)^2 \frac{(s^2 + t^2)ds - s(2sds + 2tdt)}{((s^2 + t^2)^2 + s^2 + t^2)^2} = \frac{(t^2 - s^2)ds - 2stdt}{(1 + s^2 + t^2)^2}
\end{aligned}$$

係数に現れる関数 $\frac{t^2-s^2}{(1+s^2+t^2)^2}$，$\frac{-2st}{(1+s^2+t^2)^2}$ は $s = t = 0$ のまわりに C^∞ 級に拡張される．従って α は $s = t = 0$ に C^∞ 級に拡張されることが分かった．

$\boxed{\text{採点基準}}$ 1 点．α が無限遠点の近傍で C^∞ 級であることを (具体的に計算して) 確かめているかどうか．