幾何学I　演習問題No.1 略解

問題1　$U \subset X$ を X の開集合とする．$i^{-1}(U) = A \cap U$ であるから，相対位相の定義よりこれは A の開集合.

問題2　$x \neq y$ なる点 $x, y \in X$ をとる．$d(x,y) = \epsilon$ とおき，$U = \{z \in X \mid d(x,z) < \epsilon/2\}$, $V = \{z \in X \mid d(y,z) < \epsilon/2\}$ と定めると，U, V は開集合で $x \in U$, $y \in V$．また三角不等式から $U \cap V = \emptyset$. (実際，$z \in U \cap V$ とすると，$\epsilon = d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z) < \epsilon$ となって矛盾．)

問題3　$x, y \in A$ が $x \neq y$ を満たすとする．X はハウスドルフなので X の開集合 U, V が存在して $x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \emptyset$．ここで $U' = U \cap A$, $V' = V \cap A$ を考えると相対位相の定義から U', V' は A の開集合で，$U' \cap V' = \emptyset$，$x \in U'$, $y \in V'$．したがって A はハウスドルフ.

問題4　B の開集合 U をとる．相対位相の定義から Y の開集合 U' が存在して $U = U' \cap B$．このとき $(f|_A)^{-1}(U) = A \cap f^{-1}(U')$ であるが，f の連続性から $f^{-1}(U')$ は X の開集合である．したがって $A \cap f^{-1}(U')$ は A の開集合．したがって $f|_A$ は連続.

問題5 (1) $\Rightarrow$ (2): $f^{-1}(U)$ の任意の点 x をとる．$f(x) \in U$ であるので $\exists \epsilon > 0$ s.t. $B_\epsilon(f(x)) \subset U$．（ここで $B_\epsilon(p)$ は p 中心の半径 ϵ の開球体を表す.）(1) より $\delta > 0$ が存在して $\|x - y\| < \delta \Rightarrow f(y) \in B_\epsilon(f(x))$. このことは $f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x)) \subset U$ を意味する．したがって $B_\delta(x) \subset f^{-1}(U)$．すなわち任意の x に対して x を含むある開球体が $f^{-1}(U)$ に含まれる．よって $f^{-1}(U)$ は開集合.

(2) $\Rightarrow$ (1): 任意に $x \in \mathbb{R}^n$, $\epsilon > 0$ をとる．開球体 $U = B_\epsilon(f(x))$ に対して (2) を適用すると $f^{-1}(U) = f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$ は x を含む開集合．したがって $\exists \delta > 0$, s.t. $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$. このことは $\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \epsilon$ を意味する.

問題6 (1) $\mathbb{R}^3$ は距離空間よりハウスドルフ，したがってその部分空間である S^2 もハウスドルフ（問題2,3参照)．また S^2 は連続写像 $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ による閉集合 $\{1\}$ の逆像であるから，閉集合である．さらに有界であることは明らか．$\mathbb{R}^n$ の部分集合について，有界閉集合であることとコンパクトであることとは同値（Heine-Borel の被覆定理).

(2) $\varphi(x,y,z) = (\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z})$, $\psi(x,y,z) = (\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z})$.

(3) φ が同相写像であることを示す．ψ も同様なので省略する．

φ の逆写像は $\varphi^{-1}(x,y) = (\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1})$ で与えられることは直接計算でチェックできる．特に φ は全単射である．

また φ は $\mathbb{R}^3 \setminus \{z = 1\}$ から $\mathbb{R}^2$ への連続写像の S^2 への制限であるから連続である (問題4より)．また φ^{-1} は $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^3$ への連続写像で像が S^2 に含まれるものから来ているから連続である (問題4より）[1]．したがって φ, φ^{-1} はともに連続であり，φ は同相写像.

(4) 簡単な計算により $\psi \circ \varphi^{-1}(x,y) = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$．定義域は $\varphi(U \cap V) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \neq (0,0)\}$. $\varphi \circ \psi^{-1}$ も答えは同じ．$\varphi \circ \psi^{-1}(x,y) = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$ でその定義域は $\psi(U \cap V) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (0,0)\}$.

---

[1] ここでは座標関数 x, y, z およびその多項式あるいはそれらの商で与えられる関数が連続であることは微分積分学で習ったこととして認めている．また $\mathbb{R}^n$ の開集合から $\mathbb{R}^m$ への写像で各成分が連続関数で与えられるものが連続であることも既に既習のこととして認めている．

問題 7　$U \subset Z$ を開集合とすると，$h^{-1}(U) = p^{-1}(g^{-1}(U))$ である．商位相の定義から

$$g^{-1}(U) \text{ が } Y \text{ の開集合} \iff p^{-1}(g^{-1}(U)) \text{ が } X \text{ の開集合}$$

である．従って，g が連続であることと，h が連続であることは同値になる．

問題 9　$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy = 0\}$ が 1 次元位相多様体の構造を持ったとし，$p := (0,0) \in X$ の座標近傍 (U,ϕ) をとる．必要なら U を小さく取り直して，$U = \{(x,y) \in X \mid |\,|x|,|y| < \epsilon\}$ の形としてよい（この形の集合が $p \in X$ の基本近傍系をなすことに注意）．$\phi(U)$ は $\mathbb{R}$ の連結開集合であるから，そこから 1 点 $\phi(p)$ を除いた集合 $\phi(U)\backslash\{\phi(p)\} = \phi(U\backslash\{p\})$ は 2 つの連結成分からなる．一方，$U\backslash\{p\}$ は 4 つの連結成分からなり，ϕ が同相であったことに矛盾．