幾何学 I　演習問題 No.9 (2020 年 6 月 23 日)

レポート課題 No.9　以下の**問題 101** を解いて，6 月 30 日 (火)17:00 までに PandA でオンラインで提出してください．締め切りを過ぎたものの提出は受け付けません[1]．また，違う問題番号を解いたものは採点しません．

基本問題

問題 100 次のベクトル場の積分曲線を求めよ．これらのベクトル場は完備か．

(1) $\mathbb{R}$ 上のベクトル場 $x^2\frac{\partial}{\partial x}$.

(2) $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 $x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$.

(3) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上のベクトル場 $x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$.

(4) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,1)\}$ 上のベクトル場 $x\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial x}$.

標準問題

問題 101 n 次正方行列 $A = (a_{i,j})$ に対して，$\mathbb{R}^n$ 上のベクトル場 $V(A)$ を $V(A) = \sum_{1\le i,j\le n} a_{i,j}x_j\frac{\partial}{\partial x_i}$ と定義する．ただし，$x_1,\dots,x_n$ は $\mathbb{R}^n$ の座標.

(1) $V(A)$ の x_0 を初期値とする積分曲線 $x(t)$ が $x(t) = \exp(tA)x_0$ で与えられることを確認せよ．ただし，$\exp(tA) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(tA)^n$ は行列の指数写像である．とくに $V(A)$ は完備なベクトル場である．

(2) A が交代行列，すなわち ${}^tA + A = 0$ を満たすとする．このとき $V(A)$ は単位球面 S^{n-1} に接している，すなわち，任意の $p \in S^{n-1}$ に対して，$V(A)_p \in T_pS^{n-1}$ であることを示せ.

(3) A を交代行列とする．(2) より $V(A)$ は S^{n-1} 上のベクトル場とみなすことができる．このとき $V(A)$ が S^{n-1} 上のベクトル場として滑らか (C^∞ 級) であることを示せ．またさらに (1) で求めた flow $\varphi_t(x_0) = \exp(tA)x_0$ は S^{n-1} を保つことを確認せよ.

(4) n 次正方行列 A, B に対して $[V(A), V(B)] = -V([A,B])$ を示せ．ただし右辺の $[A,B] = AB - BA$ は行列の交換子積である.

問題 102 C^∞ 級多様体 M 上の C^∞ 級ベクトル場 X に対して $X(f) = f^2 + 1$ を満たす C^∞ 級関数 f が存在すれば，X は完備ではないことを示せ.

[1]PandA がダウンしている等の理由で提出できない場合は私のメールアドレス iritani@math.kyoto-u.ac.jp に直接送付してください.

問題 103 $f(x)$ を $\mathbb{R}^n$ の開集合 U 上で定義された $\mathbb{R}^n$ 値の C^∞ 級関数とする．また a を U の点とする．次の微分方程式を考える．

$$x(0) = a, \quad \frac{dx}{dt}(t) = f(x(t))$$

十分小さい $\epsilon > 0$ に対して U に値をとる C^∞ 級の解 $x\colon (-\epsilon, \epsilon) \to U$ が一意的に存在することを次のようにして示せ．$x_0(t) = a$ を定数関数とし，関数 $x_n(t)$ を帰納的に

$$x_{n+1}(t) = a + \int_0^t f(x_n(s))ds$$

で定めるとき，ある区間 $(-\epsilon, \epsilon)$ 上で $x_n(t)$ は解に一様収束する．

問題 104 $\mathbb{R}^n$ 上の C^∞ 級ベクトル場 $X = \sum_{i=1}^n f_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$ について，全ての i に対し $f_i(x)$ が $\mathbb{R}^n$ 上の有界関数であるとする．このとき X は完備であることを示せ．

問題 105 直交群 $O(n)$ のリー環の元 $X \in \mathfrak{o}(n)$ に対して，$O(n)$ 上のベクトル場 $\underline{X}$ を

$$\underline{X}_A = XA$$

で定める．$X, Y \in \mathfrak{o}(n)$ に対して $[\underline{X}, \underline{Y}] = -\underline{[X, Y]}$ を示せ．

問題 106 問題 105 におけるベクトル場 $\underline{X}$ は次のように得られることを示せ．$O(n)$ における積を $m\colon O(n) \times O(n) \to O(n)$ とかく．$m(g_1, g_2)$ において g_2 を固定し，g_1 について単位元 $g_1 = e = E_n$ で微分することで得られる写像を $D_1m(e, g_2)\colon \mathfrak{o}(n) = T_{E_n}O(n) \to T_{g_2}O(n)$ とする．このとき $\underline{X}_A = D_1m(e, A)X$ であることを示せ．

問題 107 $X, Y \in \mathfrak{o}(n)$ に対して，$O(n)$ 上のベクトル場 V を $V_A = XA + AY$ で定める．$V_A \in T_AO(n)$ であることを確かめ，その積分曲線を求めよ．

<u>発展問題</u>

問題 108 問題 103 の解は初期値 a および時間 t の両方について C^∞ 級であることを示せ．

問題 109 X を M 上の完備ベクトル場とする．X の生成する 1 パラメータ変換群を $\Phi\colon M \times \mathbb{R} \to M, (x, t) \mapsto \Phi(x, t) = \varphi_t(x)$ とかく．Φ が $(x_0, t_0) \in M \times \mathbb{R}$ の近傍で C^∞ 級であることを示そう．以下では簡単のため $t_0 > 0$ とする．

(1) $K = \Phi(\{x_0\} \times [0, t_0])$ とおく．K の開近傍 V と $\epsilon > 0$ が存在して Φ は $V \times (-\epsilon, \epsilon)$ 上で C^∞ 級であることを示す.

(2) 自然数 $N > 0$ を $t_0/N < \epsilon$ となるようにとるとき，$\varphi_{t_0} = \overbrace{\varphi_{t_0/N} \circ \varphi_{t_0/N} \circ \cdots \circ \varphi_{t_0/N}}^{N \text{ 個}}$ を使って φ_{t_0} が x_0 の近傍で C^∞ 級であることを示す.

(3) $\Phi(x, t_0 + t) = \varphi_{t+t_0}(x) = \varphi_t(\varphi_{t_0}(x)) = \Phi(\varphi_{t_0}(x), t)$ を用いて Φ が (x_0, t_0) の近傍で C^∞ 級であることを示す.