幾何学 I　演習問題 No.8 (2020 年 6 月 17 日)

レポート課題 No.8　以下の**問題 89 と問題 92** を解いて，6 月 23 日 (火)17:00 までに PandA でオンラインで提出してください．締め切りを過ぎたものの提出は受け付けません[1]．また，違う問題番号を解いたものは採点しません．

基本問題

問題 86 $S^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$ が $\mathbb{R}^n$ の部分多様体であることを次の二つの方法で確かめよ．

(1) 定義に基づき，S^{n-1} の各点 p で $\mathbb{R}^n$ の座標近傍 $(U; y_1, \dots, y_n)$ をうまくとると，$U \cap S^{n-1} = \{y_n = 0\}$ と書けることを示す．(例えば $p = (-1, 0, \dots, 0)$ で確かめよ．)

(2) 1 は関数 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ の正則値であることを示す．

注：当然 (2) の方が容易である．(2) から (1) をどのように導いたか思い出しておこう．(沈め込みの局所座標表示に関する結果を使う．)

問題 87 M を C^∞ 級多様体，$p \in M$ とする．f を点 p の開近傍 U で定義された C^∞ 級関数とする．授業で示したように，次の性質を持つ p の開近傍 V と隆起関数 (bump function) $\rho\colon M \to \mathbb{R}$ が存在する：$\overline{V} \subset U$, ρ は C^∞ 級関数で，$0 \le \rho(x) \le 1$, $\mathrm{Supp}(\rho) \subset U$, $\rho|_{\overline{V}} = 1$．このとき次の関数 $\tilde{f}\colon M \to \mathbb{R}$ は C^∞ 級関数であって $\tilde{f}|_V = f|_V$ を満たすことを示せ．

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \rho(x) f(x) & x \in U \\ 0 & x \notin U \end{cases}$$

問題 88 次の $\mathbb{R}^2$ のベクトル場 X, Y の交換子積 $[X, Y]$ を計算せよ．

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \qquad Y = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$$

(問題 93 を使ってよい．) どうしてそのような計算結果になるか考察せよ．

標準問題

問題 89 $f\colon M \to N$ を C^∞ 級写像，$q \in N$ を f の正則値とする．このとき $f^{-1}(q)$ は M の部分多様体であり，$p \in f^{-1}(q)$ での接空間 $T_p f^{-1}(q)$ は $T_p M$ の部分ベクトル空間と見なすことができる (埋め込み写像 $i\colon f^{-1}(q) \to M$ の微分 $d_p i$ は単射なので)．$T_p f^{-1}(q) = \mathrm{Ker}(d_p f\colon T_p M \to T_q N)$ を示せ．

[1] PandA がダウンしている等の理由で提出できない場合は私のメールアドレス iritani@math.kyoto-u.ac.jp に直接送付してください．

問題 90 $O(n,\mathbb{R})=\{A\in M_n(\mathbb{R}): {}^tAA=E_n\}$ を直交群とする．

(1) $O(n,\mathbb{R})$ が $M_n(\mathbb{R})\cong\mathbb{R}^{n^2}$ のコンパクト部分多様体であることを示せ．

(2) $O(n,\mathbb{R})$ の単位元での接空間 $\mathfrak{o}(n,\mathbb{R})$ を $M_n(\mathbb{R})$ の部分空間として求めよ．$\mathfrak{o}(n,\mathbb{R})$ が交換子積で閉じていることを示せ．

問題 91 積 $O(n,\mathbb{R})\times O(n,\mathbb{R})\to O(n,\mathbb{R})$ および逆元をとる写像 $O(n,\mathbb{R})\to O(n,\mathbb{R})$ が C^∞ 級写像であることを示せ．

問題 92 ユニタリー群を $U(n)=\{A\in M_n(\mathbb{C})\mid {}^t\overline{A}A=E_n\}$ で定義する．ここで $M_n(\mathbb{C})$ は複素数係数の n 次正方行列全体のなすベクトル空間である．$U(n)$ は $M_n(\mathbb{C})\cong\mathbb{C}^{n^2}\cong\mathbb{R}^{2n^2}$ の部分多様体であることを証明せよ．また $U(n)$ の単位元での接空間 $\mathfrak{u}(n)$ を $M_n(\mathbb{C})=T_{E_n}M_n(\mathbb{C})$ の部分空間として求め，それが括弧積で閉じていることを示せ．

問題 93 $\mathbb{R}^m$ 上の C^∞ 級ベクトル場 $X=\sum_{i=1}^m\xi_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$, $Y=\sum_{i=1}^m\eta_j(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$ を考える．C^∞ 級関数 f に対して，$[X,Y]f=X(Y(f))-Y(X(f))$ と定めるとき，

$$[X,Y]f=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m\left(\xi_j(x)\frac{\partial\eta_i(x)}{\partial x_j}-\eta_j(x)\frac{\partial\xi_i(x)}{\partial x_j}\right)\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

とかけることを示せ．

問題 94 多様体上の C^∞ 級ベクトル場 X,Y,Z および C^∞ 級関数 f について，次を示せ．

(1) $[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]=0$.

(2) $[X,fY]=X(f)Y+f[X,Y]$.

問題 95 複素平面 $\mathbb{C}$ の座標 $z=x+\sqrt{-1}y\mapsto(x,y)\in\mathbb{R}^2$ を考える．$\mathbb{C}$ 上のベクトル場 $X=a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}$ $(a,b\in\mathbb{R})$ は Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上の C^∞ 級ベクトル場に拡張されることを示せ．

問題 96 $X=\mathbb{R}\times\{0,1\}\subset\mathbb{R}^2$ に次の関係の生成する同値関係を入れる．

$$(x,0)\sim(y,1)\iff x=y \text{ かつ } x\neq 0$$

X には $\mathbb{R}^2$ からの相対位相を入れ，この同値関係についての商位相空間を $Y=X/\sim$ とする．また $U_i\subset Y$ $(i=0,1)$ を $\mathbb{R}\times\{i\}$ の Y における像とする．

(1) Y はハウスドルフではないことを示せ．

(2) U_i は Y の開集合であることを示せ.

(3) $\pi_i\colon \mathbb{R}\times\{i\} \to U_i$ を自然な写像とする. π_i は同相写像であり, $\{(U_0, \pi_0^{-1}), (U_1, \pi_1^{-1})\}$ は Y の C^∞ 級アトラスであることを示せ. (したがって Y は「ハウスドルフでない C^∞ 級多様体」である.)

(4) 開被覆 $\{U_0, U_1\}$ に従属する 1 の分割は存在するか.

問題 97 $\mathbb{R}^2$ を次の同値関係 $\sim$ で割った商位相空間を M とする.

$$(x, y) \sim (x+n, (-1)^n y + m) \qquad n, m \in \mathbb{Z}$$

$\pi\colon \mathbb{R}^2 \to M$ を商写像とする. M はハウスドルフであり, $\pi\colon \mathbb{R}^2 \to M$ が C^∞ 級写像になるような C^∞ 級多様体の構造を持つことを示せ.

発展問題

問題 98 リー群 G が多様体 M に推移的に作用するとする. ここで G の M への**作用**とは, C^∞ 級写像 $G \times M \to M, (g, m) \mapsto g \cdot m$ で $1 \cdot m = m$ および $(g_1 g_2) \cdot m = g_1 \cdot (g_2 \cdot m)$ を満たすものが与えられることであり, 作用が**推移的**であるとは, 任意の 2 点 $m_1, m_2 \in M$ に対して $g \cdot m_1 = m_2$ を満たす $g \in G$ が存在することである. $m \in M$ を固定するとき, 写像 $G \to M,\ g \mapsto g \cdot m$ は沈め込みであることを示せ.

問題 99 リー群 G が多様体 M に推移的に作用するとする. $N, L \subset M$ を部分多様体とする. このとき $g \cdot N$ と L が横断的に交わる $g \in G$ が存在することを示せ. ($g \cdot N$ と L が横断的に交わるとは, 任意の $p \in (g \cdot N) \cap L$ に対して $T_p(g \cdot N) + T_p L = T_p M$ が成り立つこと. 横断性については, No.6 の問題 69 も見よ.)