幾何学 I　演習問題 No.7 (2020 年 6 月 10 日)

レポート課題 No.7　以下の**問題 77 と問題 81** を解いて，6 月 16 日 (火)17:00 までに PandA でオンラインで提出してください．締め切りを過ぎたものの提出は受け付けません[1]．また，違う問題番号を解いたものは採点しません．

基本問題

問題 71 関数 $a(x)$ を次で定める．

$$a(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

自然数 k に関する帰納法で次を証明せよ．$a(x)$ は k 回微分可能であり，ある多項式 $P_k(y)$ が存在して次が成立する．

$$a^{(k)}(x) = \begin{cases} P_k(1/x)e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

このことから $a(x)$ は C^∞ 級であることが従う．

問題 72 M を位相多様体，(U, φ) を M の座標近傍とする．つまり $U \subset M$ は M の開集合で $\varphi\colon U \to U' \subset \mathbb{R}^m$ は U と $\mathbb{R}^m$ の開集合 U' の間の同相写像とする．B_ϵ, $\overline{B_\epsilon}$ で（原点中心の）$\mathbb{R}^m$ の開球体および閉球体を表すことにする．

$$B_\epsilon = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_1^2 + \cdots + x_m^2 < \epsilon^2\}$$
$$\overline{B_\epsilon} = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_1^2 + \cdots + x_m^2 \leq \epsilon^2\}$$

閉球体 $\overline{B_\epsilon}$ が U' に含まれるとき，$\overline{\varphi^{-1}(B_\epsilon)} = \varphi^{-1}(\overline{B_\epsilon})$ を示せ．ただし左辺は M における閉包をあらわす．(問題 40 の類似問題)

問題 73 位相空間 X の部分集合 $U_1, \dots, U_N$ について $\overline{U_1 \cup \cdots \cup U_N} = \overline{U_1} \cup \cdots \cup \overline{U_N}$ を証明せよ．

標準問題

問題 74 位相多様体 M に対して次の条件は同値であることを示せ．

(a) M は σ コンパクト

(b) M は第二可算公理を満たす.（可算個の開基が存在する）

[1] PandA がダウンしている等の理由で提出できない場合は私のメールアドレス iritani@math.kyoto-u.ac.jp に直接送付してください．

問題 75 位相空間 X の部分集合族 $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が局所有限であるとき，次を示せ．

$$\overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \overline{G_\lambda}.$$

問題 76 M を第 2 可算公理を満たす C^∞ 級多様体とする．F_1, F_2 を互いに交わらない閉集合とするとき，M 上の C^∞ 級関数 $f\colon M \to \mathbb{R}$ であって $f|_{F_1} = 1$, $f|_{F_2} = 0$ となるものが存在することを示せ．

問題 77 M を第 2 可算公理を満たす多様体，$N \subset M$ を閉部分多様体とする．N 上の C^∞ 級関数 f は M 上の C^∞ 級関数に拡張されることを示せ．

（ヒント：局所的な f の拡張 f_α を作り，適当な 1 の分割 $\{\rho_\alpha\}$ を用意して $\sum_\alpha \rho_\alpha f_\alpha$ を考える．）

問題 78 写像 $f\colon S^n \to \mathbb{RP}^n$ を合成 $S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{RP}^n$ により定める．この写像 f は 2 対 1 の被覆写像であることを示せ．

問題 79 Hopf 写像 $f\colon S^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n$ が C^∞ 級写像であって，沈めこみであることを証明せよ．

問題 80 $\mathbb{RP}^n$ 上の関数

$$f([x_0, x_1, \dots, x_n]) = \frac{x_1^2 + 2x_2^2 + \cdots + nx_n^2}{x_0^2 + \cdots + x_n^2}$$

が C^∞ 級であることを示し，その臨界点を求めよ．

問題 81 写像 $f\colon \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}^6$ を $(x, y, z) \in S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ に対して $f([x, y, z]) = (x^2, y^2, z^2, xy, yz, zx)$ と定義する．f は C^∞ 級写像であり，また埋め込みであることを示せ．

発展問題

問題 82 $(n+1)$ 変数多項式 $f(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_{n+1}]$ が自然数 $k \geq 1$ に対して次の条件を満たすと仮定する．

$$f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_{n+1}) = \lambda^k f(x_1, \dots, x_{n+1}) \qquad (\forall \lambda \in \mathbb{R}^\times)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0 \implies (x_1, \dots, x_{n+1}) = 0$$

このとき $\mathbb{RP}^n$ の部分集合

$$\{[x_1, \dots, x_{n+1}] \in \mathbb{RP}^n \mid f(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0\}$$

は $\mathbb{RP}^n$ の部分多様体であることを示せ．

問題 83 σ コンパクトかつ局所コンパクトなハウスドルフ位相空間はパラコンパクトであることを示せ．(ヒント：1 の分割の存在を示すときに授業で使った補題を使う．)

問題 84 (長い半直線)　ω_1 を最小の非可算順序数，すなわち非可算の整列順序集合 ω_1 であって任意の $\beta \in \omega_1$ に対して $\{\alpha \in \omega_1 \mid \alpha \leq \beta\}$ が可算集合になるものとする．集合 $X = \omega_1 \times [0,1)$ に辞書式順序を入れる．つまり $(\alpha, x) \leq (\beta, y) \Leftrightarrow \alpha \leq \beta$ かつ $\alpha = \beta$ ならば $x \leq y$ と定める．集合 X の位相を $(a,b) = \{x \in X \mid a < x < b\}$, $a, b \in X$ の形の集合を開基とする位相とする．$0 \in \omega_1$ を ω_1 の最小元とし，$X^* = X \setminus \{(0,0)\}$ とおく．X を閉じた長い半直線，X^* を開いた長い半直線という．X^* は連結 1 次元 C^∞ 多様体であって，第 2 可算ではない (したがって σ コンパクトではない) ことを示せ．

問題 85 第 2 可算公理を満たす多様体は可分 (稠密な可算部分集合を持つ) であることを示せ．逆に可分であるが第 2 可算ではない多様体の例を挙げよ．