幾何学I　演習問題 No.6 (2020年6月2日)

レポート課題 No.6　以下の**問題 61 と問題 63** を解いて，6月9日 17:00 までに PandA でオンラインで提出してください．締め切りを過ぎたものの提出は受け付けません[1]．また，違う問題番号を解いたものは採点しません．

基本問題

問題 58 X をコンパクト位相空間，Y をハウスドルフ位相空間とする．連続写像 $f\colon X \to Y$ が全単射であれば，同相写像であることを示せ．

問題 59 写像 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $f(x,y) = (x, xy)$ で定める．f の臨界点の集合および臨界値の集合を求めよ．また f の像を決定せよ．

問題 60 授業では $\mathbb{RP}^n$ の開集合 $U_i = \{[x_1, \dots, x_{n+1}] \in \mathbb{RP}^n \mid x_i \neq 0\}$ に対して座標 $\varphi_i\colon U_i \to \mathbb{R}^n$ を $\varphi_i([x_1, \dots, x_{n+1}]) = (\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i})$ で定義した．座標 φ_i が連続写像であることを証明せよ．

標準問題

問題 61 次の写像ははめ込みか，埋め込みか．理由をつけて答えよ．

(1) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (\frac{t^2-1}{t^2+1}, \frac{-2t}{t^2+1})$.

(2) $g\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^3$, $g(x,y) = (x^2, y^2, xy)$.

(3) $h\colon (-\infty, 1) \to \mathbb{R}^2$, $h(t) = (1-t^2, t-t^3)$.

問題 62 $f\colon M \to N$ は点 p ではめ込みであるとする．このとき p の開近傍 $U \subset M$ が存在して $f|_U\colon U \to N$ は埋め込みである．これを示せ．（ヒント：前回示したはめ込み写像の局所座標表示に関する定理を使う．）

問題 63 L, N を C^∞ 級多様体，$f\colon L \to N$ を C^∞ 級埋め込みとする．像 $f(L)$ は N の部分多様体になることを証明せよ．ただし，部分集合 $S \subset N$ が (l 次元) 部分多様体であるとは任意の $s \in S$ に対して N の座標近傍 $(U; x_1, \dots, x_n)$ であって $S \cap U = \{p \in U : x_{l+1}(p) = \cdots = x_n(p) = 0\}$ を満たすものが存在することである．（ヒント：前回示したはめ込み写像の局所座標表示に関する定理を使う．）

問題 64 N を n 次元 C^∞ 級多様体，$L \subset N$ を l 次元 C^∞ 級部分多様体とする．授業では細部を省略した，L が自然に C^∞ 級多様体の構造を持つことの証明，を完成させよ．つまり

[1] PandA がダウンしている等の理由で提出できない場合は私のメールアドレス iritani@math.kyoto-u.ac.jp に直接送付してください．

(1) 各点 $p \in L$ に対し，L が部分多様体であることの定義から，p を含む N の座標近傍 $(U; x_1, \dots, x_n)$ で

$$L \cap U = \{a \in U : x_{l+1}(a) = \cdots = x_n(a) = 0\}$$

を満たすものが存在する．このとき $(U \cap L; x_1, \dots, x_l)$ は L の座標近傍になることを示せ．

(2) このようにして与えられる座標近傍の間の座標変換が C^∞ 級であることを示せ．

問題 65 $S^2 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$ 上の関数 $f\colon S^2 \to \mathbb{R}$ を $f(x,y,z) = xy$ で定める．$f(x,y,z)$ の臨界点を全て求めよ．

問題 66 M を m 次元 C^∞ 級多様体，N を n 次元 C^∞ 級多様体，$f\colon M \to N$ を C^∞ 級写像とする．

(1) 部分集合 $F \subset M$ が閉である必要十分条件は M の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ が存在して，任意の $\alpha \in A$ について $F \cap U_\alpha$ が U_α の閉集合であることである．これを示せ．

(2) 0 以上の整数 r に対して $S_r = \{p \in M : \operatorname{rank} d_p f \leq r\}$ とおく．S_r は M の閉集合であることを示せ．

注：(2) から，f の臨界点の集合 S_{n-1} は閉集合であることが分かる．

問題 67 $\mathbb{RP}^n$ がハウスドルフ位相空間であることを証明せよ．([松本幸夫] 命題 11.2 の証明は厳密ではない．厳密な証明を与えること．)

<u>発展問題</u>

問題 68 実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して写像 $k_\alpha\colon \mathbb{R} \to T^2 \cong \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ を $k_\alpha(t) = [t, \alpha t]$ で定める．$\alpha \notin \mathbb{Q}$ のとき，次を示せ．

(1) k_α は単射であって，その像は T^2 のなかで稠密である．

(2) k_α は埋め込みではない．すなわち $k_\alpha\colon \mathbb{R} \to k_\alpha(\mathbb{R})$ は同相写像ではない．ただし $k_\alpha(\mathbb{R})$ には T^2 からの相対位相を入れる．

問題 69 M, N を C^∞ 級多様体．$L \subset N$ を C^∞ 級部分多様体とする．C^∞ 級写像 $f\colon M \to N$ が L に横断的 (transversal) であるとは，任意の点 $p \in M$ に対して，$f(p) \in L$ ならば

$$\operatorname{Im}(d_p f\colon T_p M \to T_{f(p)} N) + T_{f(p)} L = T_{f(p)} N$$

が成立することである．(このとき $f \pitchfork L$ と書く．) ここで，包含写像 $i\colon L \to N$ の微分 $d_{f(p)}i\colon T_{f(p)}L \to T_{f(p)}N$ により，部分多様体 L の接空間 $T_{f(p)}L$ は $T_{f(p)}N$ の部分空間とみなしている．f が L に横断的であるならば $f^{-1}(L)$ は M の部分多様体であることを証明せよ．

問題 70 M を m 次元 C^∞ 級多様体，N を n 次元 C^∞ 級多様体，$f\colon M \to N$ を C^∞ 級写像とする．任意の点 $p \in M$ に対して $\operatorname{rank} d_p f$ が一定の値 r をとるとする．$q \in N$ に対して $f^{-1}(q)$ は (空でなければ) M の $m-r$ 次元 C^∞ 級部分多様体であることを示せ．[2020 年 7 月 21 日問題訂正]