# 幾何学 I　演習問題 No.5　(2020 年 5 月 27 日)

**レポート課題 No.5**　以下の**問題 49** と**問題 50** を解いて，6 月 2 日 17:00 までに PandA でオンラインで提出してください．締め切りを過ぎたものの提出は受け付けません[1]．また，違う問題番号を解いたものは採点しません．

基本問題

**問題 47**　$M, N, Q$ を多様体，$f\colon M \to N$, $g\colon N \to Q$ を $C^\infty$ 級写像とする．$p \in M$, $q = f(p) \in N$ に対して，微分に対する次の chain rule が成り立つことを示せ．

$$d_p(g \circ f) = d_{f(p)}g \circ d_pf.$$

**問題 48**　$f\colon M \to N$ を $C^\infty$ 級微分同相写像とする．$M$ の次元と $N$ の次元は等しいことを示せ．

**問題 49**　$M$ を $m$ 次元多様体，$(U, \varphi)$ を $M$ の座標近傍とする．ただし $\varphi\colon U \to U'$ は $M$ の開集合 $U$ と $\mathbb{R}^m$ の開集合 $U'$ の間の同相写像である．

(1) $U'$ のコンパクト集合 $A$ に対して $\varphi^{-1}(A)$ は $M$ のコンパクト集合であるか？正しければ証明し，正しくなければ反例を与えよ．

(2) $U'$ の閉集合 $A$ に対して $\varphi^{-1}(A)$ は $M$ の閉集合であるか？正しければ証明し，正しくなければ反例を与えよ．

標準問題

**問題 50**　$M, N$ を $C^\infty$ 級多様体, $f\colon M \to N$ を $C^\infty$ 級写像とする．写像 $f$ が $p \in M$ で沈めこみであるとき，$p$ の座標近傍 $(U; x_1, \ldots, x_m)$ および $f(p)$ の座標近傍 $(V; y_1, \ldots, y_n)$ が存在して $x_1(p) = \cdots = x_m(p) = 0$, $y_1(f(p)) = \cdots = y_n(f(p)) = 0$，$f(U) \subset V$ であり，$f$ の座標表示は

$$(x_1, \ldots, x_m) \mapsto (y_1, \ldots, y_n) = (x_1, \ldots, x_n)$$

で与えられる．(沈めこみの条件から $n \leq m$ であることに注意せよ．) 逆関数定理を使ってこれを証明せよ．

**問題 51**　陰関数定理を仮定して逆関数定理を証明せよ．

**問題 52**　包含写像 $i\colon S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ ははめ込みであることを示せ．このことから $S^n$ の各点での接空間は $\mathbb{R}^{n+1}$ の部分空間と見なせることがわかる (なぜか？).

---

[1] PandA がダウンしている等の理由で提出できない場合は私のメールアドレス iritani@math.kyoto-u.ac.jp に直接送付してください．

**問題 53**　写像 $f\colon \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$ を $f(z) = z^2$ で定義する．$f$ の微分はすべての点で同型であるが，$f$ は $C^\infty$ 級微分同相ではないことを示せ．

**問題 54** [問題 45 再掲]　多様体の間の $C^\infty$ 級写像 $f\colon M \to N$ が全単射で，各点 $p \in M$ において $d_pf\colon T_pM \to T_{f(p)}N$ が同型であれば，$f$ は微分同相写像であることを示せ．(ヒント：逆関数定理を使う．)

**問題 55**　$C^\infty$ 級はめこみ $f\colon S^2 \to \mathbb{R}^2$ は存在するか．存在すれば例を与え，存在しなければそのことを証明せよ．

<u>発展問題</u>

**問題 56**　問題 33 に与えた写像 $f\colon S^3 \to \widehat{\mathbb{C}}$ を考える．この写像は $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ と見なしたとき，

$$f(z_1, z_2) = \begin{cases} \frac{z_1}{z_2} & z_2 \neq 0 \text{ のとき} \\ \infty & z_2 = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

で定義された．この写像が沈めこみであることを示せ．(ヒント：各点 $p \in S^3$ に対して，$\widehat{\mathbb{C}}$ の開集合 $U$ 上で定義された $C^\infty$ 級写像 $s\colon U \to S^3$ でその像は $p$ を含み，$f \circ s = \mathrm{id}$ を満たすものを見つけることができればよい．)

**問題 57**　逆関数定理の証明を次の手順で行ってみよ．([松本] にある証明とは少し異なる．) $U$ を $\mathbb{R}^n$ の開集合，$f\colon U \to \mathbb{R}^n$ を $C^\infty$ 級写像で点 $p \in U$ での Jacobi 行列 $(Jf)_p$ が正則なものとする．

(i) まず適当な座標変換によって $p = f(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$ は原点，$(Jf)_p$ は単位行列と仮定してもよいことを示す．

(ii) $g_y(x) = y + x - f(x)$ とおく．$\epsilon > 0$ が存在して $|y| \leq \epsilon/2$ ならば $g_y$ は半径 $\epsilon$ の閉球体 $\overline{B_\epsilon(0)} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq \epsilon\}$ で定義されて $g_y(\overline{B_\epsilon(0)}) \subset \overline{B_\epsilon(0)}$ が成り立つ．

(iii) さらに $\epsilon > 0$ を小さくとれば，$g_y\colon \overline{B_\epsilon(0)} \to \overline{B_\epsilon(0)}$ は縮小写像にとることが出来る．すなわち，定数 $0 < k < 1$ が存在して $|g_y(x_1) - g_y(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|, (\forall x_1, x_2 \in \overline{B_\epsilon(0)})$．このことから，縮小写像の原理を適用して，$y \in \overline{B_{\epsilon/2}(0)}$ の逆像 $f^{-1}(y)$ が $\overline{B_\epsilon(0)}$ 内に一意に定まることを示す．(ヒント：$g_y(x_1) - g_y(x_2) = \int_0^1 [\frac{d}{dt} g_y(tx_1 + (1-t)x_2)]dt$．)

(iv) $y \mapsto f^{-1}(y)$ が連続であることを示す．

(v) $f^{-1}$ は微分可能であることを示し，$J(f^{-1})$ を計算する．

(vi) $f^{-1}$ が $C^\infty$ 級であることを示す．

**注**：以上の縮小写像の原理を利用した証明は無限次元の Banach 空間にも一般化できる．