幾何学 I　演習問題 No.4　 (2020 年 5 月 20 日)

<u>**レポート課題 No.4**</u>　以下の**問題 40** と**問題 41** を解いて，5 月 26 日 17:00 までに PandA でオンラインで提出してください．締め切りを過ぎたものの提出は受け付けません[1]．また，違う問題番号を解いたものは採点しません．

<u>基本問題</u>

問題 38　 p を多様体 M の点とし，v を点 p での方向微分とする．定数関数 f に対して $v(f) = 0$ を示せ．

問題 39　 M, N を C^∞ 級多様体，$f\colon M \to N$ を点 $p \in M$ の近傍で C^∞ 級の写像とする．点 $f(p) \in N$ の近傍で定義された C^∞ 級関数 φ に対して $\varphi \circ f$ は p の近傍での C^∞ 級関数となるが，実数 $v(\varphi \circ f)$ を対応させる写像 $\varphi \mapsto v(\varphi \circ f)$ を $d_p f(v)$ と書く．<u>この定義に基づいて</u>次を示せ．

(1) $d_p f(v)$ は $f(p)$ での方向微分を定める．

(2) 写像 $T_p M \ni v \mapsto d_p f(v) \in T_{f(p)} N$ は $\mathbb{R}$ 上線形である．

<u>標準問題</u>

問題 40　 M を位相多様体とする．任意の点 $p \in M$ に対して p を含む開近傍 V でその閉包 $\overline{V}$ がコンパクトであるものが存在する．これを示せ．(ヒント：M がハウスドルフであることを証明で使う必要がある．)

問題 41　リーマン球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ に対して z を $\mathbb{C} = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}$ 上での標準座標, $w = z^{-1}$ を $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ 上の座標とする．また $z = x + \sqrt{-1}y$, $w = s + \sqrt{-1}t$ と書く（ここで，x, y, s, t は実数に値をとる座標．）

(1) 点 $z \in \mathbb{C}^\times$ における接空間 $T_z\widehat{\mathbb{C}}$ の基底 $\{(\frac{\partial}{\partial s})_z, (\frac{\partial}{\partial t})_z\}$ をもう一つの基底 $\{(\frac{\partial}{\partial x})_z, (\frac{\partial}{\partial y})_z\}$ の一次結合として書き表せ．

(2) Möbius 変換 $f(z) = \frac{z}{a-z}$ に対して $z = a$ での接写像 $d_a f\colon T_a\widehat{\mathbb{C}} \to T_\infty\widehat{\mathbb{C}}$ を基底 $\{(\frac{\partial}{\partial x})_a, (\frac{\partial}{\partial y})_a\}$ および $\{(\frac{\partial}{\partial s})_\infty, (\frac{\partial}{\partial t})_\infty\}$ を使って行列表示せよ．ただし $a \in \mathbb{C}$.

問題 42　 $f(x) = f(x_1, \ldots, x_m)$ を $\mathbb{R}^m$ の原点の近傍で定義された C^∞ 級関数とする．原点の近傍で定義された C^∞ 級関数 $h_1(x), \ldots, h_m(x)$ であって

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{m} x_i h_i(x)$$

[1] PandA がダウンしている等の理由で提出できない場合は私のメールアドレス iritani@math.kyoto-u.ac.jp に直接送付してください．

を満たすものが存在することを示せ．(ヒント：$\frac{d}{dt}f(tx_1,\ldots,tx_m)$ を積分する．) また，これを繰り返し使って原点の近傍で定義された C^∞ 級関数 $g_{i,j}(x)$, $1 \leq i,j \leq m$ であって

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{m} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) + \sum_{i,j=1}^{m} x_j x_j g_{ij}(x)$$

を満たすものが存在することを示せ．

問題 43　V を実ベクトル空間とする．基底をとれば $V \cong \mathbb{R}^n$ であるから，V は自然に C^∞ 級多様体と思うことができる．任意の点 $x \in V$ に対して次の写像 $\Phi\colon V \to T_xV$ はベクトル空間の同型であることを示せ．$v \in V$ に対して x を通る曲線 $c_v(t) = x + vt$ を考え，その速度ベクトル $\Phi(v) := \frac{dc_v}{dt}(0) \in T_xV$ を対応させる．

問題 44　$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$ の $\mathbb{R}^3$ への包含写像を i で表す．

(1) i は C^∞ 級写像であることを示せ．

(2) 点 $p = (x_0, y_0, z_0)$ に対して $\mathrm{Im}(d_pi\colon T_pS^2 \to T_p\mathbb{R}^3)$ は

$$\left\{ a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c\frac{\partial}{\partial z} \in T_p\mathbb{R}^3 \,\middle|\, ax_0 + by_0 + cz_0 = 0 \right\}$$

で与えられることを示せ．

発展問題

問題 45　C^∞ 級多様体 M, N の間の写像 $f\colon M \to N$ について，次の (1), (2) は同値であることを示せ．

(1) f は全単射で，$d_pf\colon T_pM \to T_{f(p)}N$ は全ての点 p において同型

(2) f は微分同相写像である．

問題 46　C^∞ 級写像 $f\colon S^2 \to S^2$ に対して，全ての点 $p \in S^2$ において d_pf は同型であるとする．このとき f は微分同相写像であることを示せ．