幾何学 I　演習問題　(2020 年 5 月 13 日)

<u>レポート課題 **No.3**</u>　以下の**問題 26** と**問題 32** を解いて，5 月 19 日 17:00 までに PandA でオンラインで提出してください．締め切りを過ぎたものの提出は受け付けません[1]．また，違う問題番号を解いたものは採点しません．

<u>基本問題</u>

問題 26　リーマン球面の間の写像 $f\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$, $f(z) = az + b$ が C^∞ 級写像であることを定義に従って示せ．ただし $a \neq 0$ とし，$f(\infty) = \infty$ と定義する．

問題 27　$ad - bc \neq 0$ のとき，Möbius 変換 $f\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$,

$$f(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & z \neq \infty,\ cz+d \neq 0 \text{ のとき} \\ \infty & cz+d = 0 \text{ のとき} \\ \frac{a}{c} & z = \infty,\ c \neq 0 \text{ のとき} \\ \infty & z = \infty,\ c = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

は C^∞ 級微分同相 (diffeomorphism) であることを証明せよ．ただし Möbius 変換が C^∞ 級写像であることは授業で証明したので使っても良い．

問題 28　M, N, Q を C^∞ 級多様体とし，$f\colon M \to N$, $g\colon N \to Q$ を写像とする．$p \in M$ とし，$q = f(p)$ とおく．写像 f が点 p で C^∞ 級，g が点 q で C^∞ 級のとき，写像 $g \circ f$ は点 p で C^∞ 級であることを証明せよ．但し，

$$\text{写像 } f \text{ が } p \in M \text{ で } C^\infty \text{ 級} \iff \begin{array}{l} p \text{ の座標近傍 } (U, \varphi) \text{ および } f(p) \text{ の座標近傍} \\ (V, \psi) \text{ が存在して } f(U) \subset V \text{ かつ } \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \\ \text{が } \varphi(p) \text{ の近傍で } C^\infty \text{ 級である} \end{array}$$

と定義する．

問題 29　M, N を C^∞ 級多様体とする．$f\colon M \to N$ が点 p の近傍で C^∞ 級であるとき，$f\colon M \to N$ は点 p で連続であることを示せ．ただし，f が点 p で連続であるとは，$f(p)$ の任意の近傍 B に対して $f^{-1}(B)$ が p の近傍になることである．

問題 30　p を通る C^∞ 級曲線とは，$c\colon (-\epsilon, \epsilon) \to M$ なる形の C^∞ 級写像 c であって $c(0) = p$ となるものとする．但し正の数 ϵ は曲線によって変わり得る．p を通る C^∞ 級曲線 $c, \tilde{c}$ に対して次の同値関係 $\sim$ を導入する．

$$c \sim \tilde{c} \iff \begin{array}{l} p \text{ を含む座標近傍 } (U, \varphi) \text{ が存在して} \\ \left.\dfrac{d}{dt}\varphi(c(t))\right|_{t=0} = \left.\dfrac{d}{dt}\varphi(\tilde{c}(t))\right|_{t=0} \end{array}$$

[1]PandA がダウンしている等の理由で提出できない場合は私のメールアドレス iritani@math.kyoto-u.ac.jp に直接送付してください．

これが同値関係であることを示せ．（本質的には，右の条件が座標近傍 (U, φ) のとり方によらないこと，を示すことになる．）

問題 31　M を m 次元 C^∞ 級多様体とするとき，p を通る C^∞ 級曲線全体の集合を上の同値関係 $\sim$ で割った集合は $\mathbb{R}^m$ と同一視できることを示せ．

問題 32　2 次元球面 $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ とリーマン球面 $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ の間の微分同相写像を構成し，それが実際に微分同相写像であることを定義に基づいて証明せよ．

ただし，S^2 には問題 6 にある北極 $(0, 0, 1)$ と南極 $(0, 0, -1)$ からの立体射影

$$\varphi\colon U = S^2 \setminus \{(0,0,1)\} \to \mathbb{R}^2, \qquad \psi\colon V = S^2 \setminus \{(0,0,-1)\} \to \mathbb{R}^2$$

を局所座標とすることで C^∞ 級多様体の構造を定める．また，$\widehat{\mathbb{C}}$ には $U_1 = \mathbb{C}$ 上での座標 $\varphi_1 = \mathrm{id}$(恒等写像) と $U_2 = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ 上での座標 $\varphi_2(z) = 1/z$(ただし $\varphi_2(\infty) = 0$) により C^∞ 級多様体の構造を定める．

<u>発展問題</u>

問題 33　3 次元球面を $\mathbb{C}^2$ の部分集合として

$$S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$$

とみなす．写像 $f\colon S^3 \to \widehat{\mathbb{C}}$ を

$$f(z_1, z_2) = \begin{cases} \dfrac{z_1}{z_2} & z_2 \neq 0 \text{ のとき} \\ \infty & z_2 = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

と定める．f は C^∞ 級写像であることを示せ．さらに f のファイバー $f^{-1}(z)$ は全ての $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して S^1 と微分同相であることを示せ．

問題 34　問題 33 の写像 $f\colon S^3 \to \widehat{\mathbb{C}}$ に対して C^∞ 級写像 $s\colon \widehat{\mathbb{C}} \to S^3$ であって $f \circ s = \mathrm{id}$ となるものは存在するか．

問題 35　$P(z)$, $Q(z)$ を複素数係数の多項式とする．また $Q(z)$ は多項式として 0 ではないと仮定する．このとき $\{z \in \mathbb{C} \mid Q(z) \neq 0\}$ 上で定義される複素関数 $f(z) = P(z)/Q(z)$ はリーマン球面の間の C^∞ 級写像 $f\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ に拡張されることを示せ．

問題 36　問題 35 の写像が C^∞ 級同相になるのは Möbius 変換のときに限られる．これを示せ．

問題 37　C^∞ 級曲線 $f\colon S^1 \to S^2$ は全射ではないことを示せ．（すなわちペアノ曲線のようなものは滑らかな曲線では作れない．）