幾何学 I　演習問題 No.2 (2020 年 4 月 22 日)

レポート課題 No.2　以下の**問題 15** と**問題 16** を解いて，5 月 12 日 17:00 までに PandA でオンラインで提出してください．今回のレポートの点数は成績に反映させます．締め切りを過ぎたものの提出は受け付けません．また，違う問題番号を解いたものは採点しません．

基本問題

問題 11　X, Y を位相空間とする．積位相空間 $X \times Y$ の開集合を記述せよ．X, Y の開集合を使って一般にどのような形に書ける集合なのか．

問題 12　位相空間 X, Y がハウスドルフのとき，積位相空間 $X \times Y$ はハウスドルフであることを示せ．

問題 13　$f_1 \colon X_1 \to Y_1,\ f_2 \colon X_2 \to Y_2$ を連続写像とする．$f_1 \times f_2 \colon X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ が連続写像であることを証明せよ．但し $(f_1 \times f_2)(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$ と定義する．

問題 14　位相空間 X の一点コンパクト化 X^* はコンパクトであることを証明せよ．

標準問題

問題 15　$S^m = \{(x_1, \ldots, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{m+1}^2 = 1\}$ に次の局所座標を定義する．

$$
\begin{aligned}
U_i^{\pm} &= \{(x_1, \ldots, x_{m+1}) \in S^m \mid \pm x_i > 0\} \\
\varphi_i^{\pm}(x_1, \ldots, x_{m+1}) &= (x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{m+1})
\end{aligned}
$$

ここで $\hat{x}_i$ は i 番目を除くことを意味する．

(1) φ_1^+ の像が $\mathbb{R}^m$ の単位開球体であることを確認し，$\varphi_1^+ \colon U_1^+ \to \varphi_1^+(U_1^+)$ が同相写像であることを証明せよ．

(2) 座標変換 $\varphi_2^+ \circ (\varphi_1^-)^{-1}$ の定義域を与え，座標変換を具体的に計算せよ．

問題 16　$\mathbb{C}$ の一点コンパクト化 $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ の無限遠点の周りの座標 $\varphi_2 \colon \mathbb{C}^\times \cup \{\infty\} \to \mathbb{C}$ を次で定義する．

$$
\varphi_2(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} & z \in \mathbb{C}^\times \text{ のとき} \\ 0 & z = \infty \text{ のとき} \end{cases}
$$

このとき φ_2 は同相写像であることを示せ．

問題 17　リーマン球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上の次の関数 f は C^∞ 級であることを示せ．

$$f(z) = \begin{cases} \frac{|z|^2}{|z|^2+1} & z \in \mathbb{C} \text{ のとき} \\ 1 & z = \infty \text{ のとき} \end{cases}$$

問題 18　局所コンパクトハウスドルフ空間 X の一点コンパクト化はハウスドルフであることを示せ．ここで位相空間 X が局所コンパクトとは各点がコンパクトな近傍を持つこと，すなわち任意の点 $x \in X$ に対してあるコンパクト部分集合 $K \subset X$ であって x を内点にもつものが存在することである．

問題 19　M, N を C^∞ 級多様体とし，$\mathcal{S} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ を M のアトラス，$\mathcal{T} = \{(V_\alpha, \psi_\alpha)\}$ を N のアトラスとする．このとき $\{(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)\}$ は $M \times N$ のアトラスになることを示せ．

問題 20　M を C^∞ 級多様体，$\mathcal{S}$ をそのアトラスとする．

$$\mathcal{M}(\mathcal{S}) = \left\{ (V, \psi)\colon M \text{ の chart} \;\middle|\; (V, \psi) \text{ はアトラス } \mathcal{S} \text{ に関して } C^\infty \text{ 級} \right\}$$

とおくとき[1]，$\mathcal{M}(\mathcal{S})$ はアトラスになること，すなわち $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ に属する 2 つの chart の間の座標変換は C^∞ 級であることを示せ．

問題 21　上記のアトラス $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ は $\mathcal{S}$ を含むアトラスの中で包含関係に関して最大のものであることを示せ．

問題 22　位相空間 M に C^∞ 級多様体の構造を定めるアトラス $\mathcal{S}, \mathcal{T}$ について

$$\mathcal{M}(\mathcal{S}) = \mathcal{M}(\mathcal{T}) \iff \mathcal{S} \cup \mathcal{T} \text{ はアトラスになる}$$

を示せ．このとき $\mathcal{S}$ と $\mathcal{T}$ は同値なアトラスであるという．

発展問題

問題 23　連続な単射 $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ であって像への全単射 $\varphi\colon \mathbb{R} \to \varphi(\mathbb{R})$ が同相写像でないものを構成せよ．

問題 24　位相空間 $\mathbb{R}$ 上の互いに同値でない C^∞ 級アトラスを構成せよ．

問題 25　位相空間 $\mathbb{R}$ に C^∞ 級多様体の構造を定める 2 つの極大アトラス $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ が与えられているとする．このとき自己同相写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ であって

$$(U, \varphi) \in \mathcal{M}_1 \iff (U, \varphi \circ f) \in \mathcal{M}_2$$

を満たすものが存在することを示せ．つまり位相空間 $\mathbb{R}$ 上の C^∞ 級多様体の構造は本質的に一意である．

[1] 本授業では，ある chart(V, ψ) がアトラス $\mathcal{S}$ に関して C^∞ 級であることを，(V, ψ) と $\mathcal{S}$ に属する任意の chart の間の座標変換が (どちらの方向も)C^∞ 級であること，と定義した．