幾何学 I　演習問題 No.13 (2020 年 7 月 22 日)

基本問題

問題 146 M, N を向き付けられた多様体で，$m = \dim M, n = \dim N$ とする．このとき積多様体 $M \times N$ には M の正の座標と N の正の座標をこの順序で並べて得られる局所座標を正の座標とする向きが入る．積多様体 $N \times M$ にも同様にして向きを入れておく．微分同相写像 $M \times N \to N \times M, (x, y) \mapsto (y, x)$ はいつ向きを保つか．

問題 147 単位閉円板 $D^2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ が境界付き多様体の構造を持つことを確認せよ．また D^2 に標準的な向きを入れるとき，その境界の S^1 に誘導される向きは左回りであることを確認せよ．

問題 148 (第 2 可算公理を満たす)m 次元多様体 M の向きは次の 3 つの同値な概念で与えられることを確かめよ．ただし $m \geq 1$ とする．

(1) 各点 $p \in M$ に対して接空間 T_pM の向きが定められており，それは次の意味で p について連続に変化する．任意の点 $p \in M$ に対して p を含む座標近傍 $(U; x_1, \ldots, x_m)$ が存在して任意の $q \in U$ に対して T_qM の向きは $(\frac{\partial}{\partial x_1})_q, \ldots, (\frac{\partial}{\partial x_m})_q$ で与えられる．

(2) M のアトラス $\mathcal{S} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ で任意の座標変換 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ のヤコビアンが正となるものの同値類．ただし，そのような性質を持つ 2 つのアトラス $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ が同値であるとは，$\mathcal{S} \cup \mathcal{S}'$ が再びその性質を持つ (つまり座標変換のヤコビアンがつねに正となる) アトラスであること．

(3) M 上の至る所消えない滑らかな m-form ω の同値類．ただし，至る所消えない m-form ω, ω' が同値であるとは，ある正の値をとる C^∞ 級関数 $f\colon M \to \mathbb{R}_{>0}$ が存在して $\omega' = f\omega$ となること．

標準問題

問題 149 単位閉区間 $[0, 1]$ は向き付けられた境界付き多様体と見なせる．$[0, 1]$ の境界 $\{0, 1\}$ に誘導される向きは何か．より一般に境界のない向き付けられた m 次元多様体 M に対して $M \times [0, 1]$ は向き付けられた境界付き多様体の構造をもつ．$\partial(M \times [0, 1]) = M \times \{0\} \sqcup M \times \{1\}$ に誘導される向きは何か．

問題 150 M を連結で向き付け可能な多様体とし，$p \in M$ とする．M の向きは T_pM の向きを誘導するので，自然な写像

$$\{M \text{ の向き }\} \to \{T_pM \text{ の向き }\}$$

があるが，これが全単射であることを示せ．

問題 151 上半空間 $\mathbb{H}^m = \{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_m \geq 0\}$ を考える．U, V を $\mathbb{H}^m$ の (相対位相に関する) 開集合，$\phi\colon U \to V$ を C^∞ 級同相写像とする[1]．$\partial\mathbb{H}^m = \{(x_1, \cdots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_m = 0\}$ に対して $\phi(U \cap \partial\mathbb{H}^m) = V \cap \partial\mathbb{H}^m$ が成立することを示せ．特にこのことから境界付き C^∞ 級多様体の「境界」が well-defined であることが分かる．(実際には ϕ は同相と仮定するだけで結論が成立する．)

問題 152 $f\colon M \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級写像．$a \in \mathbb{R}$ を f の正則値とする．このとき $f^{-1}((-\infty, a])$ は境界付き多様体であることを示せ．

問題 153 M を向き付け可能な多様体，$f\colon M \to N$ を C^∞ 級写像，$x \in N$ を f の正則値とする．このとき，M の部分多様体 $f^{-1}(x)$ は向き付け可能であることを示せ．

問題 154 ベクトル解析で学ぶ以下の定理が，今回の授業で学んだ Stokes の定理の特別の場合であることを確かめよ．各々の場合について境界の向きにも注意せよ．

(1) Green の定理：D を境界が滑らかな $\mathbb{R}^2$ の領域としたとき，

$$\int_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\partial D} f dx + g dy$$

ただし ∂D には D の内部を左側に見ながら進む向きが入っている．

(2) Stokes の定理：D を $\mathbb{R}^3$ 内の滑らかな境界付き曲面としたとき，

$$\int_D \mathrm{rot}\, \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_{\partial D} \mathbf{A} \cdot d\ell$$

ただし $\mathbf{n}$ は D の単位法ベクトルである．$\mathbf{n}$ の向いている側を D の表と考えたとき，∂D には D を左に見ながら進む向きが入っている．

(3) Gauss の発散定理：Ω を境界が滑らかな $\mathbb{R}^3$ の領域としたとき，

$$\int_\Omega \mathrm{div}\, \mathbf{A}\, dV = \int_{\partial\Omega} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

ここで $\mathbf{n}$ は Ω の外向き単位法ベクトル．

---

[1] ただし $\mathbb{R}^m$ の部分集合 A で定義された関数 f が C^∞ 級であるとは，任意の $x \in A$ に対して x の $\mathbb{R}^m$ での開近傍 U_x および C^∞ 級関数 $\tilde{f}_x\colon U_x \to \mathbb{R}$ が存在して $f|_{U_x \cap A} = \tilde{f}_x|_{U_x \cap A}$ が成立することである．$\mathbb{R}^m$ に値をとる関数が C^∞ 級であることも同様に定義される．この問題における写像 $\phi\colon U \to V$ が C^∞ 級同相写像であるとは，(1) ϕ が全単射であって，(2) ϕ を写像 $U \to \mathbb{R}^m$ と考えたときに C^∞ 級であり，(3) ϕ^{-1} を写像 $V \to \mathbb{R}^m$ と考えたときに C^∞ 級であること，と定義する．

問題 155 正則関数に対するコーシーの積分定理 $\int_C f(z)dz = 0$ を Stokes の定理から導け．

問題 156 M を向き付けられた m 次元多様体，$f\colon M \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級の沈め込みとする．ω を M 上の $m-1$ 形式で $f\colon \mathrm{Supp}(\omega) \to \mathbb{R}$ が固有 (proper) であるものとする．問題153より部分多様体 $f^{-1}(t)$ は自然に向き付けられていることに注意する．

(1) $d\omega = 0$ であるとき，$\int_{f^{-1}(t)} \omega$ は t によらないことを示せ．

(2) X を M 上のベクトル場で任意の点 $p \in M$ に対して $d_p f(X_p) = (\frac{\partial}{\partial t})_{f(p)}$ が成り立つものとする．ここで t は $\mathbb{R}$ の座標である．このとき

$$\frac{d}{dt}\int_{f^{-1}(t)} \omega = \int_{f^{-1}(t)} \mathcal{L}_X \omega$$

を示せ．

問題 157 (Poincaré の補題) $p \geq 1$ とする．$\mathbb{R}^m$ 上の p-form $\omega \in \Omega^p(\mathbb{R}^m)$ が $d\omega = 0$ を満たすとき，$\omega = d\eta$ を満たす $(p-1)$-form $\eta \in \Omega^{p-1}(\mathbb{R}^m)$ が存在することを示せ．

発展問題

問題 158 $\mathbb{H}^m$ の (相対位相に関する) 開集合 U 上の関数 $f\colon U \to \mathbb{R}$ について，次は同値であることを示せ．

(1) 任意の点 $x \in U$ に対して x の $\mathbb{R}^m$ での開近傍 U_x と U_x 上の C^∞ 級関数 $\tilde{f}_x$ が存在して $f|_{U_x \cap U} = \tilde{f}_x|_{U_x \cap U}$

(2) f は $U \setminus \partial\mathbb{H}^m$ 上の C^∞ 級関数であって，f の任意階の偏導関数 $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}$ は U 上の連続関数に拡張する．