幾何学 I　演習問題 No.12 (2020 年 7 月 15 日)

レポート課題 No.12　以下の**問題 135** と**問題 140** を解いて，7 月 21 日 (火)17:00 までに PandA でオンラインで提出してください．締め切りを過ぎたものの提出は受け付けません[1]．また，違う問題番号を解いたものは採点しません．

基本問題

問題 133 α を滑らかな 1-form, ω を滑らかな 2-form, X, Y, Z を滑らかなベクトル場とする．次が成り立つことを問題 138, 問題 140 の結果を利用して確認せよ．

$$\begin{aligned}(\alpha\wedge\omega)(X,Y,Z) &= \alpha(X)\omega(Y,Z)+\alpha(Y)\omega(Z,X)+\alpha(Z)\omega(X,Y)\\ d\alpha(X,Y) &= X\alpha(Y)-Y\alpha(X)-\alpha([X,Y])\\ d\omega(X,Y,Z) &= X\omega(Y,Z)+Y\omega(Z,X)+Z\omega(X,Y)\\ &\quad -\omega([X,Y],Z)-\omega([Y,Z],X)-\omega([Z,X],Y)\end{aligned}$$

問題 134 V を n 次元実ベクトル空間とする．V の向きと，$\bigwedge^n V$ の向きの間に自然な一対一対応があることを示せ．また V の向きと，双対空間 V^* の向きの間に自然な一対一対応があることを示せ．

問題 135 $\mathbb{C}^n$ を実ベクトル空間とみて，その基底 $(e_1,\sqrt{-1}e_1,e_2,\sqrt{-1}e_2,\dots,e_n,\sqrt{-1}e_n)$ によって向きを定める．ただし $e_1,\dots,e_n$ は $\mathbb{C}^n$ の ($\mathbb{C}$ 上の) 標準基底を表す．$\mathbb{R}$ 上の線形同型写像 $f\colon\mathbb{C}^n\to\mathbb{R}^{2n}$ を $f(z_1,\dots,z_n)=(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)$ と定める．ただし $z_k=x_k+\sqrt{-1}y_k$ とした．$\mathbb{R}^{2n}$ に標準的な向き (つまり標準基底 $e_1,\dots,e_{2n}$ による向き) を与えるとき，同型写像 f が向きを保つために自然数 n の満たすべき条件を求めよ．

問題 136 X をコンパクト位相空間，$\{V_\alpha:\alpha\in A\}$ を局所有限な X の被覆とする．(V_α は開集合とは仮定しない．) このとき $\{\alpha\in A:V_\alpha\neq\emptyset\}$ は有限集合であることを示せ．

標準問題

問題 137 V を $\mathbb{R}$ ベクトル空間，V^* を V の双対空間，$e_1^*,\dots,e_n^*$ を V^* の基底とする．$I=(i_1,\dots,i_k)$ に対して V 上の k 次の反対称形式 $\varphi_I\colon V^k\to\mathbb{R}$ を

$$\varphi_I(v_1,\dots,v_k)=\det\left(e_{i_a}^*(v_b)\right)_{1\le a,b\le k}$$

と定める．I が $1\le i_1<\cdots<i_k\le n$ を満たす全ての組 $(i_1,\dots,i_k)$ を動くとき φ_I たちは V 上の全ての k 次の反対称形式のなす $\mathbb{R}$ ベクトル空間の基底をなすことを示せ．

[1] PandA がダウンしている等の理由で提出できない場合は私のメールアドレス iritani@math.kyoto-u.ac.jp に直接送付してください．

問題 138 V を $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間とする．V^* を V の双対空間とする．$\bigwedge^k V^*$ の元を授業で説明したとおり V^k 上の反対称形式と見なす．ただし，授業での定義は $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k \in \bigwedge^k V^*$ を $(v_1, \ldots, v_k) \mapsto \det((\varphi_i(v_j))_{1 \leq i,j \leq k})$ なる反対称形式と見なすものであった．$\omega \in \bigwedge^k V^*$, $\eta \in \bigwedge^l V^*$ および $v_1, \ldots, v_{k+l} \in V$ に対して

$$(\omega \wedge \eta)(v_1, \ldots, v_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \mathrm{sgn}(\sigma) \omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) \eta(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)})$$

が成り立つことを示せ．

問題 139 $\mathbb{R}^4$ 上の 2 次微分形式 $\omega = dx_1 \wedge dx_3 + dx_2 \wedge dx_4$ を考える．

(1) 1 次微分形式 α, β であって $\omega = \alpha \wedge \beta$ を満たすものは存在しないことを示せ．（ヒント：$\omega \wedge \omega$ を計算する．）

(2) 4 次正方行列 A で表現される線形写像 $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ に対して，

$$f^*\omega = \omega \iff {}^tAJA = J$$

を示せ．ただし $J = \begin{pmatrix} 0 & -E_2 \\ E_2 & 0 \end{pmatrix}$ は 4 次正方行列．（ヒント：ω の与える反対称形式を考える．）

問題 140 C^∞ 級 k 次微分形式 $\omega \in \Omega^k(M)$ および C^∞ 級ベクトル場 $X_1, \ldots, X_{k+1} \in \mathfrak{X}(M)$ に対して次の公式が成り立つことを示そう．

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \ldots, X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} X_i \omega(X_1, \ldots, \check{X}_i, \ldots, X_{k+1}) \\ &\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \ldots, \check{X}_i, \ldots, \check{X}_j, \ldots, X_{k+1}) \end{aligned}$$

まず各々の座標近傍上で両辺が等しいことを示せばよいことに注意する．つまり座標近傍 $(U; x_1, \ldots, x_m)$ をとり，$X_1, \ldots, X_{k+1}$ を U 上のベクトル場，ω を U 上の微分形式として等式を示せばよい．

(1) 右辺は $X_1, \ldots, X_{k+1}$ の各々について $C^\infty(U)$ 線形であることを示せ．

(2) 右辺は $X_1, \ldots, X_{k+1}$ の置換について反対称であることを示せ．

(3) 上の等式を $X_1 = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \ldots, X_{k+1} = \frac{\partial}{\partial x_{i_{k+1}}}$，$i_1 < \cdots < i_{k+1}$ のときに示し，これから任意の $X_1, \ldots, X_{k+1} \in \mathfrak{X}(U)$ に対して成り立つことを結論せよ．

問題 141 M を m 次元 C^∞ 級多様体，$X_1, \dots, X_m$ を M の C^∞ 級ベクトル場で M の各点で接空間の基底をなすものとする．$\theta_1, \dots, \theta_m$ を M の 1 次微分形式で M の各点で $X_1, \dots, X_m$ の双対基底となるものとする．

(1) θ_i は C^∞ 級の 1 次微分形式であることを示せ．

(2) C^∞ 級関数 $a_{i,j,k} \in C^\infty(M)$ に対して $[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^n a_{i,j,k} X_k$ が成り立つとき，次を示せ．

$$d\theta_i + \frac{1}{2} \sum_{j,k} a_{j,k,i} \theta_j \wedge \theta_k = 0$$

問題 142 $[0,1] \times (-1,1)$ に次の関係の生成する同値関係を定める．

$$(0,x) \sim (1,-x), \quad x \in (-1,1).$$

この同値関係に関する商位相空間 $M = [0,1] \times (-1,1)/\sim$ は Möbius の帯と呼ばれる．M に C^∞ 級多様体の構造を定め，M が向きづけ不可能であることを示せ．

問題 143 $\mathbb{R}^3$ の 2 次微分形式 $\omega = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$ を考える．

(1) 点 $p \in \mathbb{R}^3$ に対して $\omega_p(v, w) = \det(p, v, w)$ であることを示せ．ただし p, v, w は 3 次元縦ベクトルとみなしている．

(2) $A \in GL(3, \mathbb{R})$ に対して $f_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $p \mapsto Ap$ を A の定める線形写像とする．$f_A^* \omega = \det(A) \omega$ を示せ．

(3) $i \colon S^2 \subset \mathbb{R}^3$ を包含写像とし，$\eta = i^* \omega$ とおく．η は S^2 の至る所消えない 2 次微分形式であることを示せ．ただし，η が至る所消えないとは任意の $p \in S^2$ に対して $\eta_p \neq 0$ であること．

発展問題

問題 144 X を C^∞ 級ベクトル場，φ_t を X の flow とする．C^∞ 級 k-form ω に対して

$$\mathcal{L}_X \omega := \left. \frac{d}{dt} \varphi_t^* \omega \right|_{t=0}$$

を ω の X による Lie 微分という．$\mathcal{L}_X \omega$ は C^∞ 級 k-form である．次を示せ．

(1) $\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = \mathcal{L}_X \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \mathcal{L}_X \beta$

(2) $\mathcal{L}_X(d\alpha) = d(\mathcal{L}_X \alpha)$

問題 145 問題 130 の内部積を使って，ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ と k-form $\omega \in \Omega^k(M)$ の内部積 $i(X)\omega \in \Omega^{k-1}(M)$ が

$$(i(X)\omega)_p := i(X_p)\omega_p$$

と定義される．微分形式の Lie 微分に関する Cartan の公式

$$\mathcal{L}_X\omega = (i(X)d + di(X))\omega$$

を示せ.