幾何学I　演習問題 No.11 (2020年7月8日)

レポート課題 No.11　以下の**問題124**と**問題127**を解いて，7月14日(火)17:00までにPandAでオンラインで提出してください．締め切りを過ぎたものの提出は受け付けません[1]．また，違う問題番号を解いたものは採点しません．

基本問題

問題 123 M, N, Q を C^∞ 級多様体，$f\colon M \to N$, $g\colon N \to Q$ を C^∞ 級写像とする．Q 上の1次微分形式 α に対して $(g \circ f)^*\alpha = f^*(g^*\alpha)$ を示せ．

問題 124 次の微分形式を計算せよ．($\varphi^*(\alpha\wedge\beta) = \varphi^*\alpha\wedge\varphi^*\beta, d\varphi^*(\alpha) = \varphi^*(d\alpha)$ を使う．)

(1) $\mathbb{R}^2$ 上の1次微分形式 $xdy - ydx$ を極座標 (r, θ) で座標表示せよ．

(2) (x, y, z) を $\mathbb{R}^3$ の座標とする．$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $\varphi(x, y, z) = (x, xy, xyz)$ とおく．$\varphi^*(dy \wedge dz)$ を求めよ．

(3) $\mathbb{R}^3$ 上の1次微分形式 $\alpha = f(x, y, z)dx + g(x, y, z)dy + h(x, y, z)dz$ に対して $d\alpha$ を求めよ．

(4) $\mathbb{R}^3$ 上の2次微分形式 $\beta = f(x, y, z)dy\wedge dz + g(x, y, z)dz\wedge dx + h(x, y, z)dx\wedge dy$ に対して $d\beta$ を求めよ．

(5) $\mathbb{R}^6$ 上の微分形式 $\omega = dx_1\wedge dx_2 + dx_3\wedge dx_4 + dx_5\wedge dx_6$ に対して，$\omega\wedge\omega\wedge\omega$ を求めよ．

標準問題

問題 125 V を $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間とする．$\bigwedge^k V$ は次の「universal mapping property」を持つことを示せ．授業では $\bigwedge^k V$ を V の基底を用いて定義したが，この性質により $\bigwedge^k V$ は基底の取り方によらないことが分かる．

任意のベクトル空間 W と，多重線形性と反対称性を満たす写像 $\varphi\colon V^k \to W$ に対して線形写像 $\tilde{\varphi}\colon \bigwedge^k V \to W$ であって次の図式を可換にするものがただ一つ存在する．

$$\begin{tikzcd} V^k \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & W \\ \bigwedge^k V \arrow[ur, dotted, "\tilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

ここで縦の写像 $\pi\colon V^k \to \bigwedge^k V$ は $\pi(v_1, \dots, v_k) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$.

[1] PandA がダウンしている等の理由で提出できない場合は私のメールアドレス iritani@math.kyoto-u.ac.jp に直接送付してください．

問題 126 有限次元ベクトル空間の間の線形写像 $f\colon V \to W$ に対して線形写像 $f\colon \bigwedge^k V \to \bigwedge^k W$ であって $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ を $f(v_1) \wedge \cdots \wedge f(v_k)$ に写すものがただ一つ存在する．これを universal mapping property を使って示せ.

問題 127 $\mathbb{R}^3$ 上の 2 次微分形式 α を

$$\alpha = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$$

とおく．$i\colon S^2 \to \mathbb{R}^3$ を包含写像とする．S^2 の北極からの立体射影の与える座標 $\varphi\colon S^2 \setminus \{(0,0,1)\} \to \mathbb{R}^2$ によって $i^*\alpha$ を座標表示せよ．ただし No.1, 問題 6 の答え (とそこで使った計算) を用いてよい.

問題 128 $\mathbb{R}^n$ の開集合上の C^∞ 級関数 $f_i(x_1, \dots, x_n)$，$1 \le i \le k$ に対して次を示せ.

$$df_1 \wedge \cdots \wedge df_k = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} \frac{\partial(f_1, f_2 \dots, f_k)}{\partial(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

ただし

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_k)}{\partial(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_1}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_2}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_k}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_{i_1}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_{i_2}} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_{i_k}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_{i_1}} & \frac{\partial f_r}{\partial x_{i_2}} & \cdots & \frac{\partial f_r}{\partial x_{i_r}} \end{vmatrix}$$

問題 129 M, N を C^∞ 級多様体，$\varphi\colon M \to N$ を C^∞ 級写像，ω を N 上の C^∞ 級の k 次微分形式とする．M の局所座標 $(x_1, \dots, x_m)$，N の局所座標 $(y_1, \dots, y_n)$ をとり，α および φ の局所表示を各々

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} \alpha_{i_1, \dots, i_k}(y_1, \dots, y_n) dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k} \\ y_j &= \varphi_j(x_1, \dots, x_m), \quad 1 \le j \le n \end{aligned}$$

とする．前問の結果を使って $\varphi^*\alpha$ の局所表示を与え，α が C^∞ 級ならば $\varphi^*\alpha$ も C^∞ 級であることを示せ.

問題 130 V を有限次元実ベクトル空間．V^* をその双対空間とする．$v \in V$ に対して線形写像 $i(v)\colon \bigwedge^k V^* \to \bigwedge^{k-1} V^*$ で次の性質を満たすものがただ一つ存在することを示せ．$i(v)$ を**内部積**という.

(1) $\varphi \in V^*$ に対して $i(v)\varphi = \varphi(v)$.

(2) $\alpha \in \bigwedge^k V^*, \beta \in \bigwedge^l V^*$ に対し $i(v)(\alpha \wedge \beta) = (i(v)\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (i(v)\beta)$.

発展問題

問題 131 V を有限次元ベクトル空間とする．$\bigwedge^k V$ の元 x が $v_1, \dots, v_k \in V$ を用いて $x = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ と書けるとき x は分解可能であるという．$x \in \bigwedge^k V$ が分解可能であることと，任意の $\varphi_1, \dots, \varphi_{k-1} \in V^*$ に対して

$$(i(\varphi_1) i(\varphi_2) \cdots i(\varphi_{k-1}) x) \wedge x = 0$$

が成り立つことは同値であることを示せ.

問題 132 $S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 1\}$ を 3 次元球面，$\pi\colon S^3 \to \mathbb{CP}^1 \cong \widehat{\mathbb{C}}$，$\pi(z, w) = [z, w]$ を Hopf 写像とする．(問題 33,56 も参照)．$i\colon S^3 \to \mathbb{C}^2$ を包含写像とし，$\mathbb{C}^2$ の座標を $(x_1 + \sqrt{-1}x_2, x_3 + \sqrt{-1}x_4)$ とおく．

$$i^*(dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4) = \pi^* \omega$$

を満たす S^2 上の 2 次微分形式 ω が存在することを示せ.