幾何学 I　演習問題 No.10 (2020 年 7 月 1 日)

<u>**レポート課題 No.10**</u>　以下の**問題 111** と**問題 119** を解いて，7 月 7 日 (火)17:00 までに PandA でオンラインで提出してください．締め切りを過ぎたものの提出は受け付けません[1]．また，違う問題番号を解いたものは採点しません．

<u>基本問題</u>

問題 110 多様体上の C^∞ 級ベクトル場 X およびその積分曲線 $c(t)$ を考える．X の局所座標表示を $X = \sum_{i=1}^m X_i(x_1, \dots, x_m)\frac{\partial}{\partial x_i}$, $c(t)$ の局所座標表示を $(c_1(t), \dots, c_m(t))$ とする．初期値を $c_i(0) = a_i$ とするとき，$c_i(t)$ の $t = 0$ での Taylor 展開を 2 次の項まで求めよ．

問題 111 $\varphi_\theta \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を反時計回りの角度 θ の回転，すなわち行列

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

の左からの掛け算で与えられる線形写像とする．

(1) φ_θ が 1 パラメータ変換群を与えることを示し，対応するベクトル場を求めよ．

(2) (x, y) を $\mathbb{R}^2$ の座標とするとき，$(\varphi_\theta)_*(x\frac{\partial}{\partial x})$ の座標表示を求めよ．

(3) $\frac{d}{d\theta}(\varphi_{-\theta})_*(x\frac{\partial}{\partial x})\big|_{\theta=0}$ を求めよ．

問題 112 M, N, Q を C^∞ 級多様体，$\varphi_1 \colon M \to N$, $\varphi_2 \colon N \to Q$ を C^∞ 級微分同相写像とする．M 上の C^∞ 級ベクトル場 X について $(\varphi_2 \circ \varphi_1)_* X = \varphi_{2*}(\varphi_{1*}(X))$ を示せ．

問題 113 (r, θ) を $\mathbb{R}^2$ の極座標とする．1-form $d\theta$ を直交座標 (x, y) に関して座標表示せよ．

<u>標準問題</u>

問題 114 微分同相写像 $\varphi \colon M \to N$ と M 上の C^∞ 級ベクトル場 X について $\varphi_* X$ は N 上の C^∞ 級ベクトル場になることを示せ．

問題 115 授業では微分同相写像 $\varphi \colon M \to N$ と M 上の C^∞ 級ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して X の押し出し $\varphi_* X \in \mathfrak{X}(N)$ を定義した．この定義が一般の C^∞ 級写像 $\varphi \colon M \to N$ に対してうまく行かないのはなぜか．

[1] PandA がダウンしている等の理由で提出できない場合は私のメールアドレス iritani@math.kyoto-u.ac.jp に直接送付してください．

問題 116 $\varphi\colon M \to N$ を C^∞ 級微分同相とする．M 上のベクトル場 X, Y に対して，$[\varphi_* X, \varphi_* Y] = \varphi_*[X,Y]$ を示せ．(さらに余裕があれば，φ が微分同相とは限らない C^∞ 級写像のときにこの主張を一般化せよ．)

問題 117 X, Y を M 上の C^∞ 級ベクトル場，φ_t を X の flow とする．授業で示した Lie 微分についての定理

$$\frac{d}{dt}(\varphi_{-t})_* Y\Big|_{t=0} = [X,Y]$$

について，局所座標表示を使った別証明を与えよ．つまり，ある局所座標 $(x_1,\ldots,x_m)$ に関して

$$X = \sum_{i=1}^{m} X_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad Y = \sum_{i=1}^{m} Y_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$$
$$\varphi_t(x) = (\varphi_1(x,t),\ldots,\varphi_m(x,t))$$

と座標表示し，与式の両辺を座標表示で計算して一致することを確かめよ．

問題 118 X, Y を M 上の C^∞ 級ベクトル場，φ_t, ψ_t を各々X, Y の flow とする．s, t が小さいとき近似式

$$\psi_s \circ \varphi_t - \varphi_t \circ \psi_s \approx st[X,Y]$$

が成立する，という主張を (適当に解釈した上で) 説明せよ．(一つの可能な解釈は，両辺を局所座標表示することによって与えられる．)

問題 119 $\mathbb{C}$ の座標を $z = x + \sqrt{-1}y$ とおく．$\mathbb{C}$ 上の 1-form

$$\alpha = \frac{dx}{(1+x^2+y^2)^2}$$

はリーマン球面 $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上の C^∞ 級 1-form に拡張されることを示せ．

問題 120 S^1 上の角度座標 $\theta \mapsto e^{\sqrt{-1}\theta} \in S^1$ に対して，$d\theta$ は S^1 上の well-defined な 1 次微分形式を与える．(角度座標 θ そのものは大域的に well-defined な関数ではないことに注意しよう．) $d\theta = df$ を満たす関数 $f \in C^\infty(S^1)$ は存在しないことを示せ．

問題 121 M を第二可算公理を満たす C^∞ 級多様体，α を C^∞ 級の 1 次微分形式で，全ての点 $p \in M$ に対して $\alpha_p \neq 0$ となるものとする．このとき C^∞ 級ベクトル場 X で $\alpha(X) = 1$ を満たすものが存在することを示せ．

問題 122 M を C^∞ 級多様体，$X_1,\ldots,X_m$ を M 上の C^∞ 級ベクトル場で全ての i,j に対して $[X_i, X_j] = 0$ を満たすものとする．点 $p \in M$ において $(X_1)_p,\ldots,(X_m)_p$ が T_pM の基底であるとき，p の座標近傍 $(U; x_1,\ldots,x_m)$ が存在して U 上で $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ となることを示せ．