幾何学 I　演習問題 No.1　(2020 年 4 月 15 日)

第 1 回レポート課題　以下の問題 2 を解いて，4 月 21 日 17:00 までに PandA でオンラインで提出してください．

今回のレポート課題はオンラインでの提出の練習，および，PC 環境等が整っているかどうかのテストを兼ねています．(また TA の方には採点ができるかどうかのテストも兼ねています．) 今回のレポートの点数は最終成績には反映させませんので，何かを提出してみて下さい．もちろん可能な限り内容のあるレポートをお願いします．今後とも幾何学 I の履修を継続する予定の人で，レポート問題の提出が PC 環境等の理由によりできなかった人はメールで入谷 (`iritani@math.kyoto-u.ac.jp`) まで連絡してください．

基本問題

問題 1　X を位相空間，$A \subset X$ を部分集合とする．A に相対位相を入れるとき，包含写像 $i\colon A \to X$, $i(a) = a$ は連続であることを示せ．

問題 2　X を距離空間とする．距離から定まる位相について X はハウスルドルフであることを示せ．

問題 3　ハウスドルフ位相空間 X の部分集合 A は相対位相についてハウスドルフであることを示せ．

問題 4　X, Y を位相空間，$f\colon X \to Y$ を連続写像とし，$A \subset X$ と $B \subset Y$ を部分集合であって $f(A) \subset B$ が成り立つものとする．A, B に相対位相を入れるとき，f を A に制限して得られる写像 $f|_A\colon A \to B$ は連続であることを示せ．

問題 5　写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ について，次は同値であることを示せ．

(1) $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ such that $\|x - y\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| < \epsilon$

(2) 任意の開集合 $U \subset \mathbb{R}^m$ について $f^{-1}(U)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合

標準問題

問題 6　$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ を 2 次元球面とする．S^2 には $\mathbb{R}^3$ からの相対位相を入れるものとする．これに次のようにして C^∞ 級多様体の構造を定める．

(1) S^2 はコンパクトハウスドルフ位相空間であることを示せ．

(2) $U = S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$, $V = S^2 \setminus \{(0,0,-1)\}$ とおく．授業で説明した立体射影の方法により写像
$$\varphi\colon U \to \mathbb{R}^2 \qquad \psi\colon V \to \mathbb{R}^2$$
を定めて，その具体的表示を与えよ．ただし φ は北極 $(0,0,1)$ からの立体射影，ψ は南極 $(0,0,-1)$ からの立体射影である．

(3) φ および ψ が同相写像であることを示せ．

(4) 座標変換 $\psi \circ \varphi^{-1}$ および $\varphi \circ \psi^{-1}$ を計算し，C^∞ 級であることを確認せよ．また座標変換の定義域も明示せよ．

問題 7　$(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間, $p\colon X \to Y$ を全射とする．(p に関する)<u>商位相</u>とは次で定義される Y の位相であったことを思い出そう.

$$\mathcal{O}_Y = \{U \subset Y \mid p^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X\}$$

Z を別の位相空間とし，写像 $h\colon X \to Z$, $g\colon Y \to Z$ が以下の可換図式を満たすとする（つまり $h = g \circ p$ とする）

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "h"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

このとき,

$$g \text{が連続} \iff h \text{が連続}$$

を示せ．(この性質は大変有用である.）

問題 8　$\mathbb{R}^2$ に次の同値関係 $\sim$ を考える.

$$(x, y) \sim (x', y') \iff x - x' \in \mathbb{Z}, y - y' \in \mathbb{Z}$$

2 次元トーラス T^2 を $\mathbb{R}^2$ をこの同値関係で割って得られる商位相空間と定義する.

(1) T^2 はコンパクトハウスドルフ空間であることを示せ.

(2) $p = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ に対して集合 $U_p \subset T^2$ 及び写像 $\varphi_p\colon U_p \to \mathbb{R}^2$ を次のように定める.

$$U_p = \left\{ [(x, y)] \in T^2 \,\middle|\, |x - x_0| < \frac{1}{2}, |y - y_0| < \frac{1}{2} \right\}$$
$$\varphi_p([x, y]) = (x, y) \quad \text{if } |x - x_0| < \frac{1}{2} \text{ and } |y - y_0| < \frac{1}{2}$$

U_p および $U_p' := \varphi_p(U_p)$ が開集合であること，また $\varphi_p\colon U_p \to U_p'$ が同相写像であることを示せ.

(3) $p, q \in \mathbb{R}^2$ に対して座標変換 $\varphi_q \circ \varphi_p^{-1}$ の定義域を求め，C^∞ 級であることを示せ.

<u>発展問題</u>

問題 9　$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ は 1 次元位相多様体の構造を持たないことを示せ.

問題 10　1 次元コンパクト連結位相多様体は円周 $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ と同相であることを示せ.