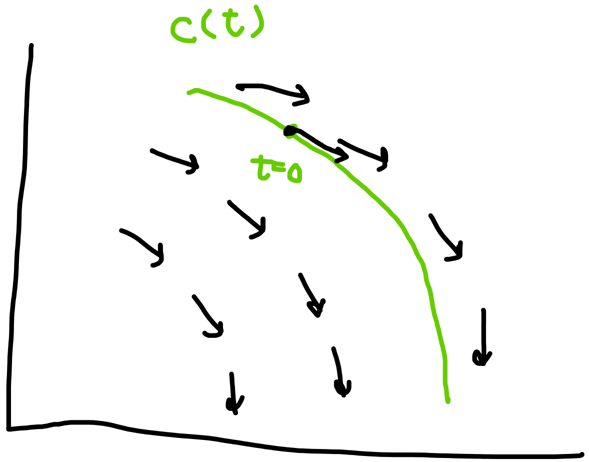
# 9回目

2020年6月24日　10:27

<u>積分曲線</u>　　$X$ : $C^\infty$級ベクトル場 on $M$　（$\forall p \in M$ に対し $X_p \in T_pM$ が与えられており $p$ に $C^\infty$級に依存する）

$X$ を「速度場」と思ったときの流れ




$c : (a,b) \longrightarrow M$　　$C^\infty$線曲線

が $X$ の <u>積分曲線</u>（integral curve）とは

$\forall t \in (a,b)$ に対し　$\underbrace{\dfrac{dc}{dt}(t)}_{\text{速度}} = \underbrace{X_{c(t)}}_{X\text{の } c(t) \text{ での値}}$　が成立すること

- 局所座標をとると　$c(t)$ の方程式は次のようになる

$$X = \sum_{i=1}^{m} \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$\xi_i(x)$ は $U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^m$

上の $C^\infty$級 fcn

上の $C^\infty$ 級 fcn

$c(t) = (c_1(t), \cdots, c_m(t))$ 座標表示、

(*) $$\frac{dc_i}{dt}(t) = \xi_i(c_1(t), \cdots, c_m(t)) \qquad i=1,2,\cdots,m$$

[常微分方程式の解の存在と一意性]

(**) 初期条件 $c(0) = (c_1(0), \cdots, c_m(0)) = \underbrace{(x_1^0, \cdots, x_m^0)}_{\substack{\text{given point} \\ \| \\ x^0}} \in U$

ある $\varepsilon > 0$ が存在して (*), (**) をみたす $C^1$ 級関数

$c: (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow U$ が一意に存在する

注 通常は $\xi_i(x)$ が Lipschitz 連続 ← $\xi_i$ は $C^\infty$ 級なので OK.

$$|\xi_i(x) - \xi_i(y)| \leqq {}^\exists K |x-y| \qquad x, y \in (x^0 \text{の近傍})$$

を仮定して 逐次近似法

$$\begin{cases} c_{n+1}(t) = x^0 + \int_0^t \xi(c_n(s))\,ds \\ c_0(t) \equiv x^0 \end{cases}$$

← 縮小写像

で解ける

㊟ $\frac{dc}{dt} = \xi(c(t))$ をつかうと $c$: $C^1$級 $\Rightarrow$ $c$: $C^2$級 $\Rightarrow \cdot \Rightarrow$ $c$: $C^\infty$級

<u>命題</u>

$x : (a, b) \to M$　$t_0 \in (a, b) \cap (c, d)$

$y : (c, d) \to M$

$x, y$ が $X$ の積分曲線で、$x(t_0) = y(t_0)$

$\Longrightarrow$ $x(t) = y(t)$　$\forall t \in (a, b) \cap (c, d)$

∵ $I := (a, b) \cap (c, d) \ni t_0$

$J := \{ t \in I \mid x(t) = y(t) \} \ni t_0$

- $J$ は $I$ の閉集合 ( ∵ $M$ は Hausdorff ゆえ 対角集合 $\Delta \subset M \times M$ は閉、 $J = (x|_I, y|_I)^{-1}\Delta$ ゆえ $J$ は閉 )

- $J$ は $I$ の開集合 ( ∵ 解の局所一意性より )

$J$ は open & closed $\rightsquigarrow$ $I$ の連結性から $I = J$ //
$J \neq \phi$

例 $\mathbb{R}$ 上のベクトル場 $1 \cdot \frac{\partial}{\partial x}$ の 積分曲線 $\frac{dx}{dt} = \underline{1}$

$\rightsquigarrow \quad x(t) = x(0) + t$

$x\dfrac{\partial}{\partial x}$ の積分曲線 $\qquad \dfrac{dx}{dt} = x$

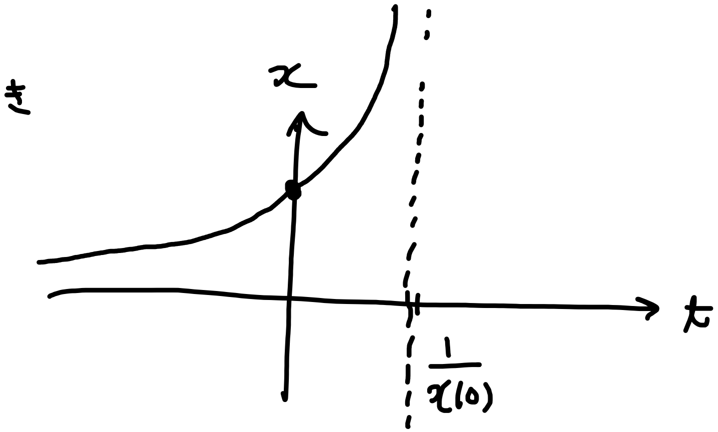
$$\rightsquigarrow \quad x(t) = x(0)\,e^{t}$$

$x^2\dfrac{\partial}{\partial x}$ の積分曲線 $\qquad \dfrac{dx}{dt} = x^2$

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int dt \qquad -\frac{1}{x} = t + C$$

$$C = -\frac{1}{x(0)} \text{ で } \qquad x(t) = \frac{x(0)}{1 - x(0)t}$$

$x(0) \neq 0$ のとき

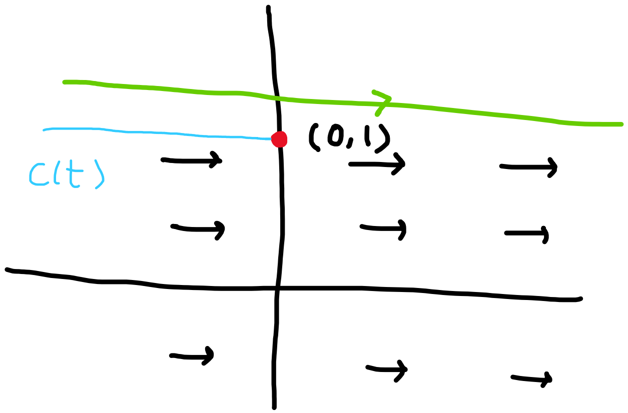



$t = \dfrac{1}{x(0)}$ で解は発散

$\rightsquigarrow$ 解は $\mathbb{R}$ 全体で定まるとは限らない

例 $(x, y)$

$\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 $\frac{\partial}{\partial x}$ ⇝ $c(t) = (x+t,\ y)$




$M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1)\}$ 上では

積分曲線が $\mathbb{R}$ 全体で定まらないことがある

$c(t) = (-1+t,\ 1)$　　$t < 1$ のみで定まる

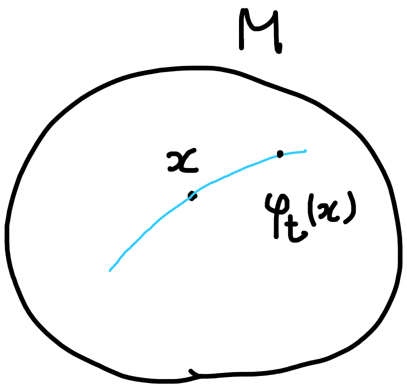
<u>定義</u>　$M$ 上のベクトル場 $X$ が<u>完備</u> (complete) とは

$\forall p \in M$ に対して $p$ を初期値とする積分曲線

$\exists\, c : \mathbb{R} \longrightarrow M$　　$c(0) = p,\quad \frac{dc}{dt} = X_{c(t)}$

が存在する。

$X$ : 完備 $C^\infty$ ベクトル場 ⇝ $X$ の flow $\varphi_t \quad M \to M \quad (t \in \mathbb{R})$




$$\begin{cases} \bullet\ \text{各 } x \in M \text{ に対して } t \longmapsto \varphi_t(x) \text{ は } X \text{ の積分曲線} \\ \bullet\ \varphi_0(x) = x \end{cases}$$

**命題** $X$ : $C^\infty$級ベクトル場 on $M$

$\forall p \in M$ に対して $p$ の open nbd $^\exists V$ と $^\exists \varepsilon > 0$ が存在して次が成立

① $x \in V$ に対して $x$ を初期値とする積分曲線

$$\begin{array}{rccc} c(x, \cdot) : & (-\varepsilon, \varepsilon) & \longrightarrow & M \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & t & \longmapsto & c(x, t) \end{array}$$

$$\frac{dc(x,t)}{dt} = X_{c(x,t)}, \quad c(x,0) = x$$ が存在する.

② $c: V \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ は $C^\infty$ 級

$(x, t) \longmapsto c(x, t)$

∵ 常微分方程式の解が初期値に $C^\infty$ 級に依存することから.

定理

$X$: $C^\infty$ ベクトル場

$\underbrace{\mathrm{Supp}\, X}_{X\text{の support (台)}} = \overline{\{x \in M \mid X_x \neq 0\}}$ がコンパクトと仮定

$\Longrightarrow X$ は完備

∵

- $x \in \mathrm{Supp}\, X$ に対して上の命題にあるような $x$ の開近傍 $V_x$

と $\varepsilon(x) > 0$ をとる

- $\mathrm{Supp}\,X$ はコンパクトなので有限コの $\bar{V}_x$ でおおわれる

$$\mathrm{Supp}\,X \subset \bar{V}_1 \cup \cdots \cup \bar{V}_N \qquad \begin{cases} \bar{V}_i = \bar{V}_{x_i} \\ \varepsilon_i = \varepsilon(x_i) \end{cases}$$

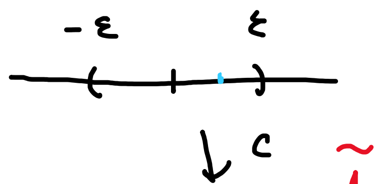
各 $x \in V_i$ に対して $x$ を初期値とする積分曲線が $(-\varepsilon_i, \varepsilon_i)$ 上存在する

- $p \in M \setminus \mathrm{Supp}\,X$ に対しては $p$ を初期値とする積分曲線は

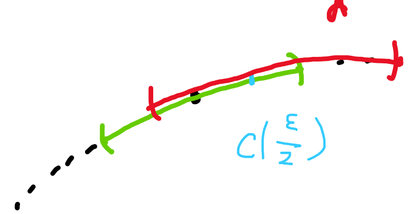
$$c(t) \equiv p \qquad (\text{定値写像})$$

より $\mathbb{R}$ 上で定まる.

- $\forall x \in M$ に対して $x$ を初期値とする積分曲線が $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 上存在する　但し $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_N)$




- $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M \qquad c(0) = x \qquad$ 積分曲線




$c(\frac{\varepsilon}{2})$ を初期値とする積分曲線 $\exists\, d(t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$

$$d(0) = c(\tfrac{\varepsilon}{2})$$

$\tilde{d}(t) = d(t - \frac{\varepsilon}{2})$ とおくと $\tilde{d} : (-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{3}{2}\varepsilon) \to M$

も積分曲線で

$$\tilde{d}(\tfrac{\varepsilon}{2}) = c(\tfrac{\varepsilon}{2})$$

$\rightsquigarrow$ $\tilde{d}(t) = c(t) \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \cap (-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{3}{2}\varepsilon)$

$\rightsquigarrow$ $c$ は $(-\varepsilon, \frac{3}{2}\varepsilon)$ に拡張された

$\rightsquigarrow$ くり返して $(-\infty, \infty) \to M$ に拡張できる。

## 完備ベクトル場の flow

$X$: 完備 $C^\infty$級ベクトル場

$\varphi_t : M \to M$ flow とは

各 $x \in M$ に対して $\mathbb{R} \ni t \longmapsto \varphi_t(x) \in M$

が $x$ を初期値とする $X$ の積分曲線であること

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = x \\ \dfrac{d\varphi_t}{dt}(x) = X_{\varphi_t(x)} \end{cases}$$

$\varphi_t$ は写像 $\Phi : M \times \mathbb{R} \to M$ を定める.

$$(x, t) \longmapsto \varphi_t(x)$$

<u>定理</u> $\Phi$ は $C^\infty$級 map で

$$\begin{cases} ① \ \varphi_0 = id_M \\ ② \ \varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{s+t} \end{cases}$$

$\{\varphi : M \to M\}$

diffeo

$\mathbb{R} \to \mathrm{Diff}(M)$

なる群準同型

と思える

(注) $\varphi_t \circ \varphi_{-t} = \varphi_{-t} \circ \varphi_t = \varphi_0 = \mathrm{id}_M$

より $\varphi_t$ は diffeo

(:) ・$\Phi$ は $C^\infty$ 級 (演習)

・$\varphi_0 = \mathrm{id}$ は明らか.

・$x \in M$ とし、 $y = \varphi_s(x)$ とおく

$y$ を初期値とする積分曲線は

$c(t) = \varphi_{t+s}(x)$ で与えられる

(:) $c(0) = \varphi_s(x) = y$

$\frac{dc}{dt}(t) = \frac{d}{dt}\varphi_{s+t}(x)$

$= X_{\varphi_{s+t}(x)} = X_{c(t)}$

一方 $c(t) = \varphi_t(y)$ でもある

$$\therefore \quad \varphi_{t+s}(x) = \varphi_t(y) = \varphi_t(\varphi_s(x))$$

$$\therefore \quad \varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s \qquad //$$

$\varphi_0 = id,\ \varphi_{s+t} = \varphi_s \circ \varphi_t$

**定義** 上の①, ② をみたす $C^\infty$ map $\Phi : M \times \mathbb{R} \to M$

$$(x, t) \mapsto \varphi_t(x)$$

を 1-parameter 変換群 (1 parameter transformation group)

という.

**定理** M上の完備な $\underbrace{\text{ベクトル場}}_{C^\infty\text{級}}$ $\underset{1:1}{\longleftrightarrow}$ 1 parameter 変換群

$$\Phi : M \times \mathbb{R} \to M$$

∵ $(\Rightarrow)$ は flow をとればよい

$(\Leftarrow)$ $\Phi(x, t) = \varphi_t(x)$ 1パラメータ変換群

に対して $X_x := \left.\dfrac{d}{dt}\varphi_t(x)\right|_{t=0} \in T_xM$ とおく.

これは $C^\infty$級ベクトル場 (座標表示するとわかる)

このとき $\varphi_t(x)$ が $X$ の flow であることを示す.

$$\frac{d\varphi_t(x)}{dt} = \left.\frac{d}{ds}\varphi_{t+s}(x)\right|_{s=0}$$

$$= \frac{d}{ds}\varphi_s\left(\varphi_t(x)\right)$$

$$= X_{\varphi_t(x)} \quad (X \text{の def より})$$

$\rightsquigarrow$ $\varphi_t(x)$ は $X$ の積分曲線

例 Lie群上のベクトル場

$$O(n) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA \cdot A = E_n \} \subset \underline{M_n(\mathbb{R})}$$

submfd　ベクトル空間

$$T_A O(n) = \{ X \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tX A + {}^tA X = 0 \}$$

$$\mathfrak{o}(n) = T_{E_n} O(n) = \{ {}^tX + X = 0 \} \quad \text{Lie環}$$

$X \in \mathfrak{o}(n)$ に対して　$O(n)$ 上のベクトル場 $\underline{X}$ を次で定める

（ここだけの記号）

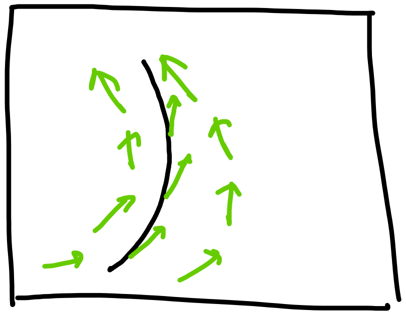
$$\underline{X}_A := XA \qquad A \in O(n)$$

行列の積

( $XA \in T_A O(n)$ であることは簡単にcheckできる )

- このベクトル場は $M_n(\mathbb{R})$ 上のベクトル場で $O(n)$ に接しているものとみなせる.

( $O(n)$ 上のベクトル場としては $C^\infty$ 級 )



- $\underline{X}$ の flow を計算したい

$$\frac{dA(t)}{dt} = X A(t) \qquad A(t):\text{行列値関数}$$

$$\rightsquigarrow \quad A(t) = \exp(tX)\, A(0)$$

行列の exponential

$$\exp(tX) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tX)^k}{k!}$$

$$= E_n + tX + \frac{t^2}{2}X^2 + \cdots$$

注 この flow は $O(n)$ を

保っていることが check できる