8回目

2020年6月17日　10:21

Lie群

(C^∞級) Lie群 とは　C^∞級多様体 G であって 群の構造をもち，

$$
\left.
\begin{array}{lll}
\text{積} : & G \times G \longrightarrow G \\
& (x, y) \longmapsto x \cdot y \\
\text{逆元} : & G \longrightarrow G \\
& x \longmapsto x^{-1}
\end{array}
\right\}
$$

が C^∞級 map になるもの

注　x を左からかける写像 $G \longrightarrow G$, $z \longmapsto xz$ は C^∞級微分同相 diffeo

(∵ 逆写像 $z \longmapsto x^{-1} z$ も C^∞級)

同様に xを右からかける写像 $z \longmapsto z \cdot x$ も diffeo

例 $GL(n, \mathbb{R}) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0 \}$ general linear group

n次正方行列（成分は実数）

- $GL(n, \mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ ⇝ 開部分多様体の構造をもつ

  open subset

- 積及び逆元をとる写像は C^∞級

$$A^{-1} = \frac{1}{\underset{\neq 0}{\det A}} \left(A\text{の余因子行列} \right)$$

例 $O(n) = O(n, \mathbb{R}) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA \cdot A = E_n \}$

直交群　　　　直交行列

- $O(n)$ は群になる（易しい）

• $O(n)$ は $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ の閉部分多様体である

$$F : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \{n\text{次対称行列}\} \cong \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$F(A) = {}^tA \cdot A$ とおく

$${}^t({}^tA\, A) = {}^tA \cdot A$$

$O(n) = F^{-1}(E_n)$ である　($\rightsquigarrow$ $O(n)$ は閉)

E_n が F の正則値であることを示せばよい

<u>Fの微分</u>

$$d_A F(X) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(A+\varepsilon X) - F(A)}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{{}^t(A+\varepsilon X)\cdot(A+\varepsilon X) - {}^tA \cdot A}{\varepsilon}$$

$$= \underbrace{{}^tAX + {}^tXA}_{\text{対称行列になっている}} 」$$

Claim $A \in O(n)$ に対して $d_AF : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \{n次対称行列\}$ は全射

$$M_n(\mathbb{R}) = T_A M_n(\mathbb{R}), \quad \{n次対称行列\} = T_{F(A)}\{n次対称行列\}$$

$\because$ B : 対称行列 $B = {}^tAX + {}^tXA$ をときたい

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}B &= {}^tAX \\ \frac{1}{2}B &= {}^tX \cdot A \end{aligned}\right\} \text{をとけばよい}$$

$$X = \frac{1}{2}\,{}^tA^{-1} \cdot B$$

$${}^tX = \frac{1}{2} B A^{-1}$$

みたす

$O(n)$の接空間

$$\iota : O(n) \hookrightarrow M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$$

submfd

- $T_A O(n)$ は $T_A M_n(\mathbb{R})$ の部分ベクトル空間と思える.

$$\overset{\shortparallel}{M_n(\mathbb{R})} \quad (\because\ d_A i \text{ が単射})$$

- $T_A O(n) = \mathrm{Ker}\left(d_A F \quad T_A M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{n(n+1)/2} \right)$

一般に $f \quad M \to N$ C^∞写像 $q \in N$ が正則値

$f^{-1}(q)$. submfd で $T_p f^{-1}(q) = \mathrm{Ker}(d_p f)$ になる

$\subseteq T_p M$

$$= \left\{ X \in M_n(\mathbb{R}) \,\middle|\, {}^t A \cdot X + {}^t X \cdot A = O \right\}$$

Lie環 : Lie群の単位元での接空間を Lie環 という.

$$o(n) = T_{E_n} O(n) = \{ X \in M_n(\mathbb{R}) \mid \underbrace{X + {}^tX = 0}_{\text{交代行列}} \}$$

↑ 次元は $\frac{n(n-1)}{2}$

$o(n)$ は かっこ積（交換子積）$[\cdot, \cdot]$ でとじている （演習）

$$[A, B] = AB - BA$$

$$A, B \in o(n) \implies [A, B] \in o(n)$$

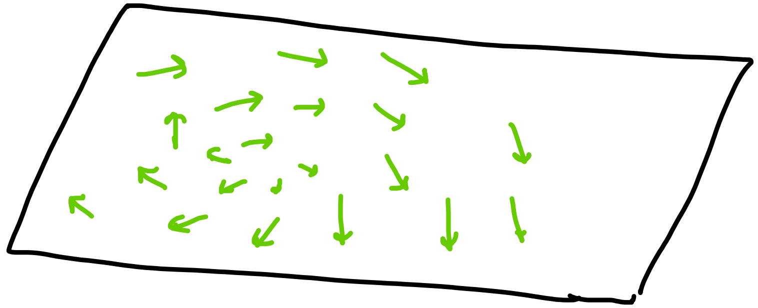
$$U(n) = \{ A \in M_n(\mathbb{C}) \mid {}^t\bar{A} \cdot A = E_n \} \quad \text{unitary群}$$

ベクトル場

M : C^∞ mfd

定義 M 上の ベクトル場 とは 各点 $p \in M$ に対して 接ベクトル

$X_p \in T_pM$ が与えられたもの



速度場，電磁場，…

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & \displaystyle\bigsqcup_{p\in M} T_pM = TM \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ p & \longmapsto & X_p \end{array}$$

なる map と思える

これに適当な位相・座標を入れて C^∞ mfd にできる

接ベクトル束

$(U ; x_1, \dots, x_m)$ chart

$p \in U$ に対して $X_p = \xi_1(p)\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right)_p + \cdots + \xi_m(p)\left(\dfrac{\partial}{\partial x_m}\right)_p \quad \leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \xi_1(p) \\ \vdots \\ \xi_m(p) \end{bmatrix}$

と書ける（座標表示）.

各 ξ_i は U 上の関数

$\xi_i = \xi_i(x_1, \cdots x_m)$

（任意の chart について）

ここに表れる ξ_i が U 上の C^∞ 級関数になるとき

X を C^∞ 級ベクトル場 という

この定義は座標 $x_1, \dots, x_m$ のとり方によらない

$$\because \quad \sum_i \underbrace{\xi_i(p)}_{C^\infty} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p = \sum_{i,j} \overbrace{\xi_i(p) \underbrace{\frac{\partial y_j}{\partial x_i}(p)}_{C^\infty \text{級}}} \left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_p$$

ベクトル場による関数の微分

f: M 上の C^∞ 級関数, $\quad X = \{X_p\}_{p \in M}$: C^∞ 級ベクトル場

$$\rightsquigarrow \quad X(f)(p) := \underbrace{X_p}_{\text{点}p\text{での方向微分}}(f) \quad \text{とおく}$$

$X(f)$ は M 上の C^∞ 級関数

$$C^\infty(M) := \{ M \text{ 上の } C^\infty \text{ 級関数} \}$$

座標 を p に

$$X_p = \sum \xi_i(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p$$

$$f = f(x_1, \cdots, x_m)$$

$$X(f) = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\xi_i(p)}_{C^\infty} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)}_{C^\infty}$$

<u>定理</u>　C^∞ 級ベクトル場 X による微分 $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$

は 次の性質をもつ

① $X(af + bg) = aX(f) + bX(g)$　　$a, b \in \mathbb{R}$

② $X(fg) = X(f) \cdot g + f \cdot X(g)$　(Leibniz rule)

逆に ①, ② をみたす写像 $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ は

ある一意な C^∞ 級ベクトル場 X による微分である

∵

・ベクトル場による微分が①, ②を満たすことは方向微分の性質から明らか

・①, ②をみたす $\phi : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ が与えられたとする

<u>Step 1</u>

$f, g \in C^\infty(M)$ が ある点 p の open nbd U 上で一致すれば $\phi(f)(p) = \phi(g)(p)$

∵ $\exists\, C^\infty$-fcn : $\rho : M \to \mathbb{R}$ $\left.\begin{array}{l}\rho(p) = 1 \\ \mathrm{Supp}\,\rho \subset U\end{array}\right)$ なるものをとる

$$\rho(x)\cdot\big(f(x) - g(x)\big) = 0 \quad {}^\forall x \in M$$

$$0 \underset{\text{線形性より}}{=} \phi(\rho\cdot(f-g)) \underset{\text{Leibniz}}{=} \phi(\rho)\cdot\underline{(f-g)} + \underline{\rho}\cdot\phi(f-g)$$

点 p で値をみて $\phi(f-g)(p) = 0$

つまり $\phi(f)(p) = \phi(g)(p)$ //

<u>Step 2</u>

f: 点 p の open nbd U 上の C^∞ 関数

$\Rightarrow$ ${}^{\exists}\tilde{f}: M \to \mathbb{R}$: C^∞ 関数 ${}^{\exists}$ p の open nbd $V \subset U$

s.t. $f|_V = \tilde{f}|_V$

(演習) V 上で 1 になる bump fcn ρ を f にかければよい

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \rho(x)\, f(x) & x \in U \\ 0 & x \notin U \end{cases}$$

Step 3　1, 2 より p の近傍で定義された C^∞ 級関数 f に対して

$\phi(\tilde{f})(p)$ は $\tilde{f}$ のとり方によらずに決まる実数

$f \longmapsto \phi(\tilde{f})(p)$ は点 p での方向微分

$$\exists!\ X_p \in T_pM \quad \text{s.t.} \quad \phi(\tilde{f})(p) = X_p(f)$$

（注 $f \in C^\infty(M)$ のときは $\phi(f)(p) = X_p(f)$）

Step 4　$\{X_p\}$ が C^∞ 級であること

（なめらか）

$(U; x_1, \cdots, x_m)$: pの座標近傍　　$\tilde{x}_i : M \to \mathbb{R}$

pのある open nbd V 上で x_i

と一致する C^∞ fcn

$q \in V$ に対して　　$X_q(x_i) = \underbrace{\phi(\tilde{x}_i)}_{C^\infty \text{ fcn}}(q)$

一方で　　$X_q = \sum_i \underline{X_q(x_i)} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_q$　　より X は

なめらか。

<u>括弧積</u>（交換子積）

X, Y : C^∞ ベクトル場　　$f \in C^\infty(M)$

$[X, Y] f := X(Y(f)) - Y(X(f))$　　と定める

$[X, Y] : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ は上の①,②をみたす

∵ ①は明らか，②をみる

$$
\begin{aligned}
[X, Y](fg) &= X(Y(\underline{fg})) - Y(X(fg)) \\
&= X(Y(f)g + fY(g)) - Y(X(f)g + fX(g)) \\
&= \underline{X(Y(f))\cdot g} + \underline{Y(f)\cdot X(g)} \\
&\quad + \underline{X(f)\cdot Y(g)} + f\, X(Y(g)) \\
&\quad - \underline{Y(X(f))\cdot g} - \underline{X(f)Y(g)} - \underline{Y(f)\cdot X(g)} \\
&\quad - f\, Y(X(g))
\end{aligned}
$$

$$= \left(X(Y(f)) - Y(X(f))\right) \cdot g$$

$$+ \quad f \cdot \left(X(Y(g)) - Y(X(g))\right)$$

$$= \left([X, Y] f\right) \cdot g + f \cdot \left([X, Y] g\right)$$

//

⇝ $[X, Y]$ は M 上の C^∞ 級ベクトル場

局所座標で計算（演習）

$$X = \sum_i \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad , \quad Y = \sum_i \eta_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

とおくとき

$$[X, Y] = \sum_{i,j} \left(\xi_i \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} - \eta_i \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$Y_p = \sum_i \eta_i(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$$

の略記

X で η_i を ビブン　　　Y で ξ_j を ビブン

$$\mathfrak{X}(M) := \{ M\text{上の } C^\infty\text{級ベクトル場} \}$$

- $\mathfrak{X}(M)$ は $C^\infty(M)$ 上の加群の構造をもつ

  $C^\infty(M)$：可換環

  $f \in C^\infty(M),\quad X \in \mathfrak{X}(M),\qquad (f\cdot X)_p = f(p)\, X_p$ は C^∞ ベクトル場

- $\mathfrak{X}(M)$ はかっこ積 $[\cdot,\cdot]$ をもつ．（⇝ Lie環になる）

ℝ上の Lie環

① $[X, Y]$ は X 及び Y について ℝ上線形

② $[X, Y] = -[Y, X]$

③ (Jacobi identity)

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$$

$\Longleftrightarrow$ ②의 뜻 $\quad [X, \cdot]$ 이 Leibniz rule 을 지킨다

$$[\underset{\sim}{X}, [Y, Z]] = [[\underset{\sim}{X}, Y], Z] + [Y, [\underset{\sim}{X}, Z]]$$

④

$$[X, fY] = X(f)Y + f[X, Y]$$

$$[gX, Y] = -Y(g)X + g[X, Y]$$

$f, g \in C^\infty(M)$