7回目

2020年6月10日　10:21

M : C^∞級多様体

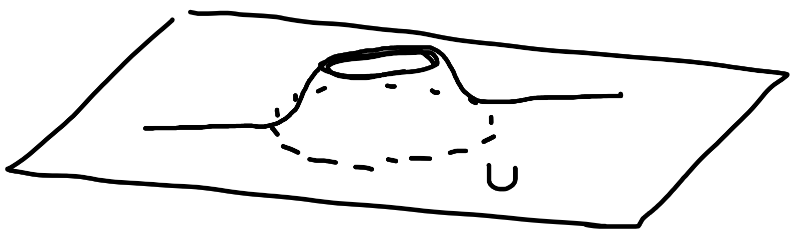
① M上の定数でない C^∞級関数は存在するか?

② Mは(十分大きいnに対し) $\mathbb{R}^n$に埋め込めるか?

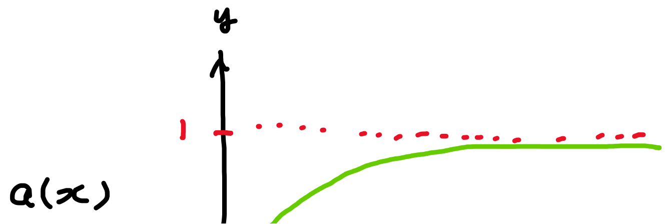
②が正しいなら($\mathbb{R}^n$上のC^∞級関数を制限して) ①もいえる

隆起関数 (bump function)

こぶ



$$a(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & x > 0 \text{ のとき} \\ 0 & x \leqq 0 \text{ のとき} \end{cases}$$



小さな open set U

上のみで0でない関数

$x=0$ で連続

$$a'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} e^{-1/x} & x>0 \\ 0 & x \leqq 0 \end{cases}$$

$x=0$ でも微分可能：

右微分 $= \displaystyle\lim_{h\to +0} \frac{e^{-1/h} - 0}{h} = \lim_{t\to\infty} \frac{e^{-t}}{1/t}$　　$t = 1/h$

$= \displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^{t}} = 0$

左微分 $= 0$

以下帰納的に　$a(x)$ は k 回微分可能で

$$a^{(k)}(x) = \begin{cases} P_k(1/x)\, e^{-1/x} & x>0 \\ 0 & x \leqq 0 \end{cases}$$

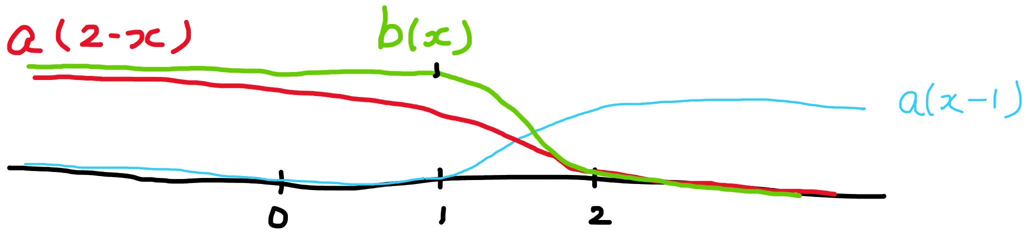
但し P_k は $1/x$ の多項式　　が言える

ただし P_k は x の多項式 」

$\Rightarrow$ $a(x)$ は C^∞級 」

$$b(x) = \frac{a(2-x)}{\underbrace{a(x-1)+a(2-x)}_{>0}}$$

は C^∞級



$$\begin{cases} b(x) = 1 & \boxed{x \leqq 1} \\ 0 < b(x) < 1 & 1 < x < 2 \\ b(x) = 0 & x \geqq 2 \end{cases}$$

$\mathbb{R}^m$ 上の bump function

$\varepsilon > 0$

$$f_\varepsilon(x) = b\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right)$$ とおく　$x \in \mathbb{R}^m$

$x=0$ のまわりで C^∞級 であることは

$x=0$ のまわりで 定数 1 であることから

$$\begin{cases} f_\varepsilon(x) = 1 & \text{if } |x| \leq \varepsilon \\ 0 < f_\varepsilon(x) < 1 & \text{if } \varepsilon < |x| < 2\varepsilon \\ f_\varepsilon(x) = 0 & \text{if } |x| \geq 2\varepsilon \end{cases}$$

M: C^∞ mfd

$p \in M$, (U, φ): p を含む chart

$$\varphi : U \xrightarrow{\cong} \underset{\text{open}}{U'} \subset \mathbb{R}^m$$

$\varphi(p) = 0$ としてよい

$\overline{B_{2\varepsilon}} = \{ x \in \mathbb{R}^m \mid |x| \leqq 2\varepsilon \} \subset U'$ となる ε をとる

$f: M \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} f_\varepsilon(\varphi(x)) & x \in U \\ 0 & x \notin U \end{cases}$$

とおく

<u>f は C^∞ 級</u>.　$M = U \cup (M \setminus \varphi^{-1}(\overline{B_{2\varepsilon}}))$　open covering

$\underbrace{U}_{\text{open}}$　$\underbrace{(M \setminus \varphi^{-1}(\overline{B_{2\varepsilon}}))}_{\text{open}}$

∵ $\varphi^{-1}(\overline{B_{2\varepsilon}})$ はコンパクト

M はハウスドルフゆえ $\varphi^{-1}(\overline{B_{2\varepsilon}})$ は M の閉

$$\begin{cases} \cdot\ f|_U \text{ は } C^\infty \text{級} \\ \cdot\ f|_{M \setminus \varphi^{-1}(\overline{B_{2\varepsilon}})} = 0 \text{ は } C^\infty \text{級} \end{cases}$$

//

<u>台 (support)</u>　$f\ X \to \mathbb{R}$　conti (連続)

$$\mathrm{Supp}\, f := \overline{\{ x \in X \mid f(x) \neq 0 \}}$$ を f の台という.

↑ closure をとっている
ことに注意!

上の bump function の場合　$\mathrm{Supp}\, f = \varphi^{-1}(\overline{B_{2\varepsilon}})$

命題　$\forall p \in M$, $\forall U$: p の open nbd (開近傍)

$\Rightarrow$ $\exists V$ p の open nbd　$\exists f$ M 上の C^∞ 級関数

s.t.　① $\overline{V} \subset U$　② $f|_{\overline{V}} = 1$

③ $0 \le f(x) < 1$　$x \notin \overline{V}$　④ $\mathrm{Supp} f \subset U$

∵ 必要なら U を小さくとり直して U は chart (U, φ) としてよい

上のように bump functin f を定める ($\overline{B_{2\varepsilon}} \subset U'$ なる ε をとって)

$V = \varphi^{-1}(B_\varepsilon)$ とおくと ①〜④ が成立

① $\overline{V} = \varphi^{-1}(\overline{B_\varepsilon})$ はいえるので $\overline{V} \subset U$

② $f|_{\overline{V}} = f|_{\varphi^{-1}(\overline{B}_\varepsilon)} = 1$　③ $x \notin \overline{V}$ のとき $0 \leq f(x) < 1$

④ $\mathrm{Supp}\, f = \varphi^{-1}(\overline{B}_{2\varepsilon}) \subset U$ //

埋め込み定理 : M : コンパクト C^∞ mfd

十分大きい n に対して $^\exists g : \underbrace{M \to \mathbb{R}^n}$ C^∞級埋めこみが存在

⇝ nコの M上の関数

(証明)

$p \in M$ に対して pを含む chart (U_p, φ_p) をとる

前命題より
$^\exists V_p$ pの近傍
$^\exists f_p$ $M \to \mathbb{R}$ C^∞級
s.t.
$p \in V_p \subset \overline{V_p} \subset U_p$
$f_p|_{\overline{V_p}} = 1$
$\mathrm{Supp}\, f_p \subset U_p$

$x \notin \overline{V_p}$ のとき $0 \leq f_p(x) < 1$

$$\bigcup_{p \in M} V_p = M \quad \text{open covering}$$

M のコンパクト性から $M = V_{p_1} \cup \cdots \cup V_{p_k}$ となる

U_{p_i} 上の座標を $\varphi_{p_i} = (x_{i1}, \cdots, x_{im})$ とおく.

$$g_{ij}(y) := \begin{cases} f_{p_i}(y) \cdot x_{ij}(y) & y \in U_{p_i} \\ 0 & y \notin U_{p_i} \end{cases}$$

とおくと g_{ij} は C^∞ 級

∵ $M = U_{p_i} \cup (M \setminus \mathrm{Supp}\, f_{p_i})$: <u>open cover</u>

・U_{p_i} 上では C^∞ 級 $\Big\}$ $\Rightarrow$ C^∞ 級 //

・ $M \setminus \mathrm{Supp}\, f_{p_i}$ 上では 0) //

$$g : M \to \mathbb{R}^{k+mk} \quad \text{を} \quad g = (\underbrace{f_{p_1}, \cdots, f_{p_k}}_{\text{bump fcn}}, \overbrace{g_{1,1}, \cdots, g_{1,m}}, \cdots \cdots \overbrace{g_{k,1}, \cdots, g_{k,m}})$$

とおくと g が埋め込みになることを示す.

M はコンパクトなので g が単射はめ込みを示せばよい

<u>はめ込み</u>

$$g_{ij}\big|_{V_{p_i}} = \underbrace{f_{p_i}\big|_{V_{p_i}}}_{\overset{\shortparallel}{1}} \cdot x_{ij} = x_{ij}$$

V_{p_i} 上での g の座標表示

$$g : (x_1, \cdots, x_m) \longmapsto (*, \cdots, *, * \cdots *, \cdots, \overbrace{x_1, \cdots, x_m}^{i\text{番目のブロック}}, \cdots, * \cdots *)$$

$\underbrace{\quad}_{k}\ \underbrace{\quad}_{m}\ \underbrace{\quad}_{m}\ \underbrace{\quad}_{m}$

Jg は 単射

単射

$g(y_1) = g(y_2)$ とする

$y_1 \in V_{p_i}$ なる i をとると　$f_{p_i}(y_1) = 1$ ゆえ　$f_{p_i}(y_2) = 1$

$\therefore\ y_2 \in \overline{V_{p_i}} \subset U_{p_i}$

$\therefore\ y_1, y_2$ は chart U_{p_i} に入る　　$y_1, y_2 \in \overline{V_{p_i}}$ ゆえ

$$x_{ij}(y_1) = g_{ij}(y_1) = g_{ij}(y_2) = x_{ij}(y_2) \quad (\forall j)$$

$\Longrightarrow y_1 = y_2$ //

Whitney の埋め込み定理　　M 第2可算公理をみたす m 次元多様体

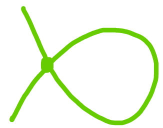
∃ $g: M \to \mathbb{R}^{2m+1}$ C^∞級のうめこみで $g(M)$が閉集合

になるものが存在.

↑

M: コンパクトなら自動的

$M^m \to \mathbb{R}^{2m}$ はめ込めても自己交差



1の分割

X 位相空間

定義 (1) 部分集合族 $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が X の被覆 (covering)

$$\iff \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha = X$$

(2) 2つの covering $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $\{W_\beta\}_{\beta \in B}$ に対して

$\{V_\alpha\}$ が $\{W_\beta\}$ の細分 (refinement) とは

$\forall \alpha \in A \quad \exists \beta \in B$ s.t. $V_\alpha \subset W_\beta$ が成立すること

(3) 部分集合族 $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が局所有限 (locally finite) とは

$\forall x \in X \quad \exists x$ の open nbd U

s.t. $U \cap V_\alpha \neq \phi$ なる $\alpha \in A$ が高々有限個

例 $\mathcal{U} = \{(n, n+2)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ は locally finite な $\mathbb{R}$ のヒフク

$\mathcal{V} = \{ (a, b) \mid a < b < a+1 \}$ は $\mathcal{U}$ の細分 だが locally finite でない $\mathbb{R}$ のヒフク

定義 M: C^∞ mfd $\quad \mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ open covering

$\mathcal{U}$に従属する1の分割 (partition of unity) とは

C^∞級関数の族 $\{\rho_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ ($\rho_\lambda : M \to \mathbb{R}$, C^∞級) で

① $0 \leqq \rho_\lambda(x) \leqq 1$

② $\{\mathrm{Supp}\,\rho_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は locally finite な M の被覆で,

$\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ の細分

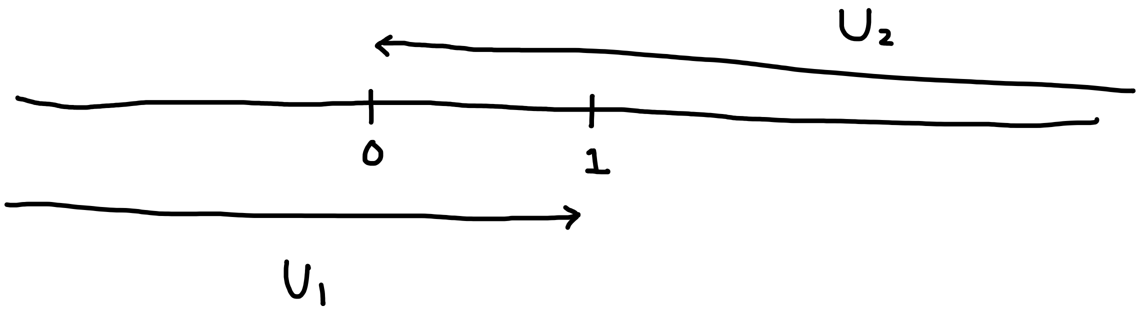
③ $\sum_{\lambda\in\Lambda} \rho_\lambda(x) = 1$

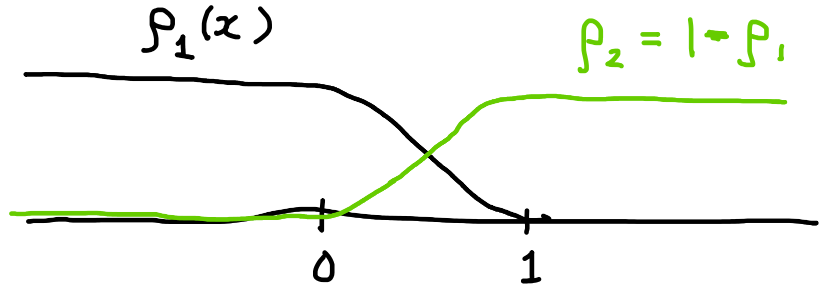
Supp ρ_λ は局所有限なので
この和は x をとめると有限和

(注) $\{\mathrm{Supp}\,\rho_\lambda\}$: locally finite $\Longleftrightarrow$ $\{\rho_\lambda^{-1}(0,1]\}_{\lambda\in\Lambda}$ が locally finite

ρ_1 (0,1]

例 $\mathbb{R} = \underset{U_1}{\underset{\shortparallel}{(-\infty, 1)}} \cup \underset{U_2}{\underset{\shortparallel}{(0, \infty)}}$ に従属する 1の分割





$\mathrm{Supp}\,\rho_1 \subset U_1$, $\mathrm{Supp}\,\rho_2 \subset U_2$

$\rho_1 + \rho_2 = 1$

定義 位相空間 X が <u>σ-compact</u> とは

$\exists$ コンパクト集合 $K_1, K_2, K_3, \cdots \subset X$ が存在して

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$$

（コンパクト集合の可算和）

「命題 位相多様体 M について 次は同値

命題　位相多様体 M に対して次は同値

(a)　M は σ-compact

(b)　M は第2可算公理をみたす　（可算開基がある）

定理　M：第2可算公理をみたす C^∞ mfd

$\forall$ open covering $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ に対してそれに従属する $\exists$ 1の分割 $\{\rho_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が存在する

さらにここで
- Λ は可算集合
- $\mathrm{Supp}\,\rho_\lambda$ はコンパクト

となるようにとれる．

補題　M：σ-compact（$\Leftrightarrow$ 第2可算）mfd

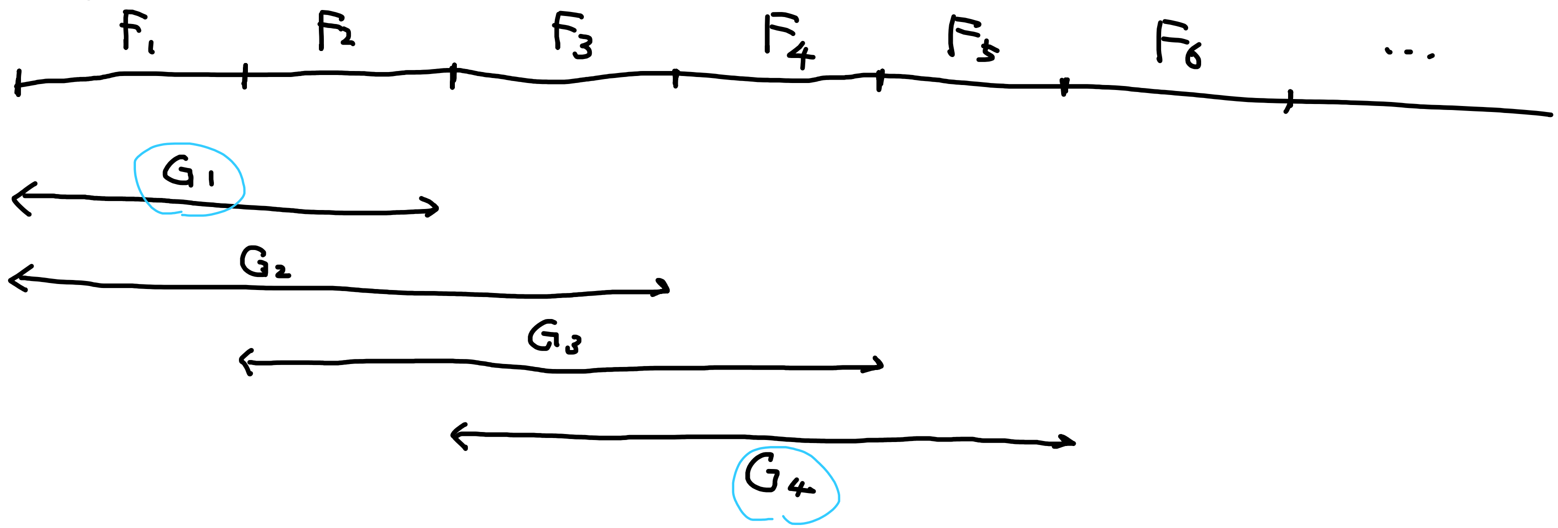
次をみたす部分集合族 $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$，$\{G_i\}_{i=1}^{\infty}$ が存在する．

① F_i はコンパクト　G_i は open　$F_i \subset G_i$

② $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$

③ $G_i \cap G_j = \phi$ if $|i-j| \geq 3$

(イメージ図)



(証明) (I) $\forall K \subset M$ コンパクト集合 $^{\exists}K$の open nbd W

st $\overline{W}$ がコンパクトになるものが存在する

∵ 各 $x \in K$ に対して $^{\exists}U(x)$: $\overline{U(x)}$: コンパクト

⇒ 各 $x \in K$ に対して x の open nbd $U(x)$ で $\overline{U(x)}$ コンパクト

(既にやった)

K は $U(x)$ でおおわれる. コンパクト性から

$$K \subset U(x_1) \cup U(x_2) \cup \cdots \cup U(x_\ell) =: W \quad \text{とおく}$$

$$\overline{W} = \overline{U(x_1) \cup \cdots \cup U(x_\ell)} = \underbrace{\overline{U(x_1)} \cup \cdots \cup \overline{U(x_\ell)}}$$

演習

コンパクトの有限和は
コンパクト

(II) M が σ-compact ゆえ $M = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$, K_j はコンパクト

と書ける.

K_n を $K_1 \cup \cdots \cup K_n$ でおきかえて $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \cdots$ と仮定してよい

$\exists$ open set の増大列 $W_1 \subset W_2 \subset W_3 \subset \cdots$ で

$\left\{ K_i \subset W_i \right.$

をみたすもの

($\overline{W_i}$ はコンパクト, $\overline{W_i} \subset W_{i+1}$ が存在.

∵ W_1 は (I) から存在する

W_2 は $\overline{W_1} \cup K_2$ の open nbd で $\overline{W_2}$ がコンパクトになるものとる. ((I) から存在)

W_3 は $\overline{W_2} \cup K_3$ の 〃 で $\overline{W_3}$ がコンパクトになるもの

以下帰納的につづける //

(III) $F_i = \overline{W_i} \setminus W_{i-1}$ (但し $F_1 = \overline{W_1}$)

$G_i = W_{i+1} \setminus \overline{W_{i-2}}$ (但し $G_1 = W_2$, $G_2 = W_3$)

とおけば補題成立.

- F_i は コンパクト集合 W_i の 閉部分集合ゆえ コンパクト

- G_i は open で $F_i \subset G_i$

- $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ であること.

  ☺ $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$

  $\forall x \in M$ に対して $x \in W_i$ となる i のうち最小のものをとると

  $$x \in W_i \setminus W_{i-1} \subseteq F_i$$

- $G_i \cap G_j = \phi$ if $|i-j| \geq 3$ は とり方から明らか.

<u>定理の証明</u>　M は 第2可算 $\Leftrightarrow$ σ- compact

$\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$: 与えられた open covering

$\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{G_i\}_{i=1}^{\infty}$: 補題にある covering

各 $x \in F_i$ に対して $\exists \alpha(x) \in A$ s.t. $x \in U_{\alpha(x)}$

$x \in U_{\alpha(x)} \cap G_i$ ← open nbd of x

前半に示した命題より $\exists V_i(x)$: x の open nbd,

$\overline{V_i(x)} \subset U_{\alpha(x)} \cap G_i$

$\exists f_{i,x}$: $M \to \mathbb{R}$ C^∞ 級

s.t.

- $f_{i,x}\big|_{\overline{V_i(x)}} = 1$,
- $y \notin \overline{V_i(x)}$ のとき $0 \leq f_{i,x}(y) < 1$
- $\mathrm{Supp}\, f_{i,x} \subset U_{\alpha(x)} \cap G_i$

Supp $f_{i,x}$ は コンパクトにとれた

$V_i(x)$ たちは F_i をおおう $\Rightarrow$ F_i のコンパクト性から

$$F_i = \overline{V_i}(x_1) \cup \cdots \cup \overline{V_i}(x_{N_i})$$

- $V_{ij} := V_i(x_j)$ とおく
- $f_{ij} := f_{i\_x_j}$ とおく

$$\underline{\mathrm{Supp}\, f_{ij} \subset G_i \cap U_{\alpha(x_j)}}$$

<u>Claim</u> $\{\mathrm{Supp}\, f_{ij}\}_{i,j}$ は locally finite

$i=1,2,3,\dots$ $\quad 1 \le j \le N_i$

$\because$ $\mathrm{Supp}\, f_{ij} \subset G_i$ に注意

G_i と交わる $\mathrm{Supp}\, f_{k,l}$ は高々有限である

$\left(\because \ \mathrm{Supp}\, f_{k\ell} \subset G_k \right.$ なので $\mathrm{Supp}\, f_{k\ell} \cap G_i \neq \phi$

$\left. \text{ならば} \ |i-k| \leqq 2 \right)$

$$f(x) := \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{N_i} f_{ij}(x)$$ は局所的に有限和

$\rightsquigarrow$ $f(x)$ は well-defined な C^∞ 級関数

$f_{ij}\big|_{\overline{V_{ij}}} = 1$ で V_{ij} は M をおおうので $\underline{f(x) > 0}$ $({}^\forall x)$

$$\rho_{ij}(x) := \frac{f_{ij}(x)}{f(x)}$$ は C^∞ 級 $\displaystyle\sum_{i,j} \rho_{ij}(x) = 1$

さらに $\{ \mathrm{Supp}\, \rho_{ij} = \mathrm{Supp}\, f_{ij} \}$ は locally finite, 可算 covering

コンパクト

であって $\{U_\alpha\}$ の細分になっている

定理'

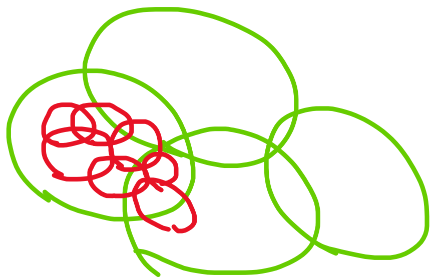
M : 第2可算 C^∞ mfd　　$\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ open covering

$\Longrightarrow$ $\exists \{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 1の分割 s.t

- $\{\mathrm{Supp}\, f_\alpha\}$ は locally finite
- $\mathrm{Supp}\, f_\alpha \subset U_\alpha$
- $\displaystyle\sum_{\alpha\in A} f_\alpha(x) = 1$

$f_\alpha : M \to \mathbb{R}$ C^∞級

注 つまり、台のコンパクト性を要求しなければ、添字集合を同じにとれる



$\because$ もとの定理の1の分割 $\{\rho_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ をとる

$\mathrm{Supp}\,\rho_\lambda \subset U_{\alpha(\lambda)}$ なる $\alpha(\lambda)\in A$ を選ぶ

$$f_\alpha := \sum_{\lambda \cdot \alpha(\lambda)=\alpha} \rho_\lambda \quad \text{とおく}$$

もしこういう λ がなければ $f_\alpha = 0$ とおく

- これは局所有限和なので f_α は C^∞級で $\underline{\sum_{\alpha\in A} f_\alpha(x) = 1}$

- $$\mathrm{Supp}\, f_\alpha = \bigcup_{\lambda \ \ \alpha(\lambda)=\alpha} \mathrm{Supp}\, \rho_\lambda$$

∵ $\{f_\alpha \neq 0\} = \bigcup_{\alpha(\lambda)=\alpha} \{\rho_\lambda \neq 0\}$ の閉包をとる

locally finite

一般に locally finite な部分集合族 $\{G_\lambda\}$ に対して

$$\overline{\bigcup_\lambda G_\lambda} = \bigcup_\lambda \overline{G_\lambda}$$

をつかうとよい

- $\{\mathrm{Supp}\, \rho_\lambda\}$ が局所有限なので $\{\mathrm{Supp}\, f_\alpha\}$ も局所有限

//

注　**パラコンパクト性**

X 位相空間 が <u>paracompact</u> $\overset{\text{def.}}{\iff}$ X の任意の open covering $\{U_\alpha\}$ に対して、局所有限な open covering $\{V_\beta\}$ で $\{U_\alpha\}$ の細分になっているものが存在する.

- 位相空間 X が σ-compact, locally compact, Hausdorff

  $\Rightarrow$ X は paracompact　（先の補題をつかう）

（特に 第2可算 mfd は パラコンパクト）

- paracompact 位相多様体の 連結成分 は 第2可算（つまり σ-cpt）

開集合になる

- 1の分割は パラコンパクト多様体でも存在