# 6回目

ノートのタイトル　2020/06/02

- はめ込みと沈め込み

$f: M \to N$ $C^\infty$ map が 点$p$ で はめ込み $\Longleftrightarrow$ $d_pf$ が単射

で 沈め込み $\Longleftrightarrow$ $d_pf$ が全射

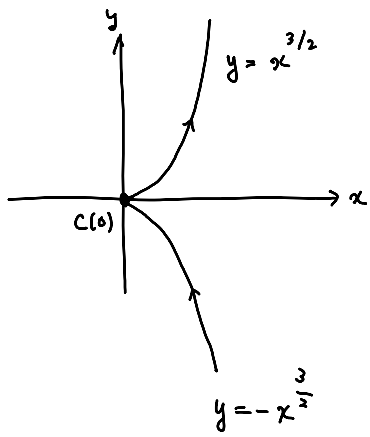
例 $i: S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ は はめ込み

$$\left.\begin{aligned} &U_{n+1}^+ = \{(x_1, \cdots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} > 0\} \\ &\varphi : U_{n+1}^+ \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n \qquad \varphi(x_1, \cdots, x_{n+1}) = (x_1, \cdots, x_n) \end{aligned}\right\} \text{chart}$$

$$i \circ \varphi^{-1}(x_1, \cdots, x_n) = \left(x_1, \cdots, x_n, \sqrt{1 - x_1^2 - \cdots - x_n^2}\right)$$ 座標表示 (の1つ)

$$J(i \circ \varphi^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ * & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$ の rank $= n$ ゆえ $d(i \circ \varphi^{-1})$ は単射

例 $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $c(t) = (t^2, t^3)$



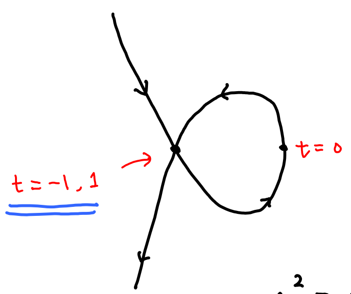

$c'(0) = (0, 0)$ より

$t = 0$ で はめ込み

ではない

例 単射ではない はめこみ

$c(t) = (1 - t^2, \ t - t^3)$




$y^2 = x^2(1 - x)$

$\forall t$ $c'(t) = (-2t, \ 1 - 3t^2) \neq 0$

より はめ込み

- トーラスへの はめ込み

$T^2 = S^1 \times S^1$ 2次元トーラス

(注) $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \ni [\theta_1, \theta_2] \longmapsto (e^{2\pi i\theta_1}, e^{2\pi i\theta_2}) \in S^1\times S^1 = T^2$

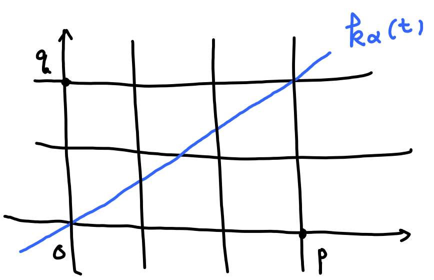
より $T^2 \cong \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$

$\alpha\in\mathbb{R}$ に対して $\underline{f_\alpha(t) = [t, \alpha t]} \in \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ とおく

- 局所的に $(\theta_1, \theta_2)$ は座標

$$\frac{d}{dt}f_\alpha(t) = (1, \alpha) \neq 0$$ より $f_\alpha$ は はめ込み

① $\alpha\in\mathbb{Q}$ のとき $\alpha = \dfrac{q}{p}$ (既約分数, $p>0$)




$f_\alpha(t) = f_\alpha(t+p)$ : 単射でない

$f_\alpha$ の像 $= \mathbb{R}/p\mathbb{Z} \cong S^1$

② $\alpha\notin\mathbb{Q}$ のとき $f_\alpha$ の像は $T^2$ で稠密 (dense) ← 演習

$f_\alpha(\mathbb{R})$ に相対位相を入れたものは $\mathbb{R}$ と同相でない

---

<u>埋め込み</u> (部分多様体)

<u>定義</u> $f: \underset{\sim}{M} \to \underset{\sim}{N}$ $C^\infty$ map が **埋め込み** (embedding) とは

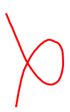
$C^\infty$ mfd

① $f$ は <u>はめ込み</u> である

② $f(M)$ に $N$ からの相対位相を入れるとき $f: M\to f(M)$ は <u>同相写像</u>

---

(はめ込み) $\supsetneq$ (単射な はめ込み) $\supsetneq$ (埋め込み)

 は はめ込み だが 単射でない

$f_\alpha: \mathbb{R}\to T^2$

$\alpha\notin\mathbb{Q}$

**定理** $M, N$ : $C^\infty$ mfd

$f: M \to N$ 単射はめ込み, $M$がコンパクト

$\Longrightarrow$ $f$は埋め込み

(:) 一般に

$X$ : コンパクト位相空間
$Y$ : ハウスドルフ位相空間

$f: X \to Y$ 全単射連続 $\Rightarrow$ $f$は同相

を $X = M$, $Y = f(M)$ (に相対位相を入れたもの) に適用する.

例 $S^n \underset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^{n+1}$ は単射はめ込み
$S^n$ はコンパクト
$\Rightarrow$ $i$ は埋め込み

注 はめ込みは局所的には埋め込み

$f: M \to N$ が点$p$ではめ込み $\Rightarrow$ $p$を含む開集合 ${}^\exists U \subset M$
s.t. $f|_U : U \to N$ はうめ込み

(:) 先週のはめ込みの局所座標表示に関する定理を使う

---

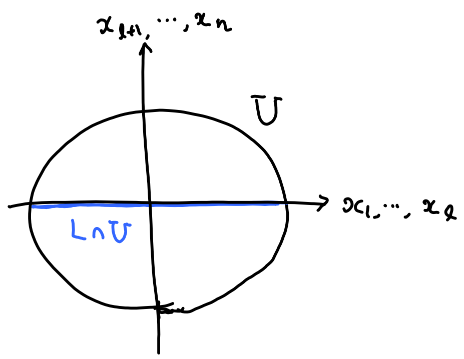
埋め込みの像は (正則) 部分多様体 とよばれるものになる
regular

**定義** $N^n$ : $C^\infty$ mfd

$N$の部分集合$L$が$N$の $\ell$次元部分多様体 $(\ell \leqq n)$

$\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^\forall p \in L$ に対して ${}^\exists N$の$p$を含む chart $(U; x_1, \cdots, x_n)$

s.t. $L \cap U = \{ a \in U \mid x_{\ell+1}(a) = \cdots = x_n(a) = 0 \}$




注 $\ell = n$のときは

$L \cap U = U$

つまり $L$は 開部分多様体

**命題** 部分多様体 $L \subset N$ は $C^\infty$ 級多様体の構造をもつ

(証明のスケッチ)

- $L$ は相対位相について Hausdorff 位相空間
- 各点 $p \in L$ に対して、上の定義にある chart $(U; x_1, \cdots, x_n)$ をとるとき $(L \cap U; x_1, \cdots, x_\ell)$ は $L$ の chart を定める。 (演習)
- 座標変換は $C^\infty$ 級 (演習)

**定理** ① $L \subset N$ が部分多様体のとき 包含写像 $i: L \to N$ は埋め込みである。

② 逆に $f: L \to N$ が埋め込みのとき、像 $f(L)$ は部分多様体。

① $L$ に相対位相を入れると、$i: L \hookrightarrow N$ は像への同相。

部分多様体の定義にあらわれる chart $(U; x_1, \cdots, x_n)$ をとるとき

$i$ の座標表示は $i(x_1, \cdots, x_\ell) = (x_1, \cdots, x_\ell, 0, \cdots, 0)$

$$J_i = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ \hline & 0 & \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \updownarrow \ \ell \text{ 個} \\ \updownarrow \ n-\ell \text{ 個} \end{array}$$ は単射。

……

② は前回の定理を使う (演習)

---

**臨界点(値)・正則点(値)** critical point / value / regular point / value

$f: M \to N$ $C^\infty$ map

**定義** ① $p \in M$ が $f$ の正則点 $\iff$ $d_pf$ が全射 $\iff$ 点 $p$ で $f$ は沈め込み

$p \in M$ が $f$ の臨界点 $\iff$ $d_pf$ が全射でない

② $q \in N$ が $f$ の正則値 $\iff$ $f^{-1}(q)$ の全ての点 $p$ が $f$ の正則点.

$q \in N$ が $f$ の臨界値 $\iff$ $q$ は $f$ の正則値でない

$\iff$ $\exists p \in f^{-1}(q)$, $p$ は $f$ の臨界点.

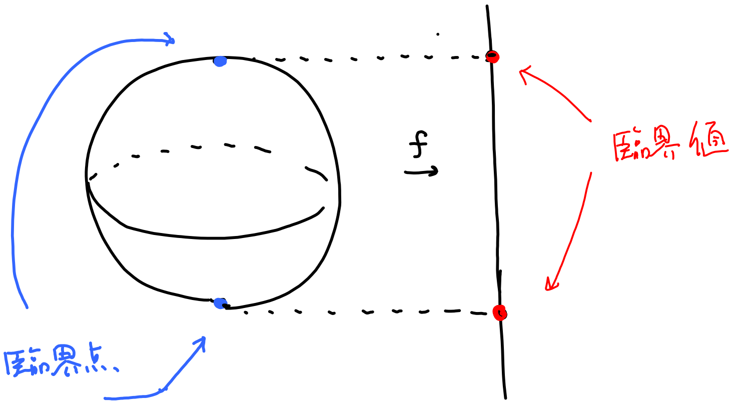
注 $f^{-1}(q) = \phi$ のときも $q$ を正則値という

例 $i: S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$　　$d_p i$ は決して全射にならない

⇝ $\forall p \in S^n$ は $i$ の臨界点

$\forall q \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus S^n$ は $i$ の正則値

例 高さ関数 $S^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = z$




$d_p f$ が全射でない

$\iff$ $p = (0, 0, \pm 1)$

Sardの定理　$f: M \to N$　$C^\infty$ map　　M: 第2可算公理を満たす

$\Rightarrow$ $f$ の臨界値の集合は測度0である. ⇝ Nのほとんど全ての点は正則値である

注
- $A \subset N$ が測度0とは Nの各chart $(U, \varphi)$ について $\varphi(U \cap A) \subset \mathbb{R}^n$ のLebesgue測度が0になること
- $B \subset \mathbb{R}^n$ のLebesgue測度が0 (外) $\iff$ Bは体積の和がいくらでも小さい可算コの直方体の族でおおわれる

  つまり, $\forall \varepsilon > 0$ ∃直方体の族 $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ s.t. $B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$

  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(I_n) < \varepsilon$
- 測度0の部分集合の補集合は dense (稠密)

**定理** $f: M^m \to N^n$ $C^\infty$ map

$q \in N$ が 正則値 であるとき、 $f^{-1}(q)$ は $m-n$ 次元 部分多様体 である.

☺ 沈め込みの局所座標表示について 前回の定理 (レポート問題) をつかう.

$p \in f^{-1}(q)$ $\exists$ $p$ を含む chart $(U; x_1, \cdots, x_m)$ $x_i(p) = 0$

$\exists$ $q$ 〃 $(V; y_1, \cdots, y_n)$ $y_j(q) = 0$

s.t. $f$ の座標表示は $(x_1, \cdots, x_m) \longmapsto (y_1, \cdots, y_n)$
$= (x_1, \cdots, x_n)$

よって $f^{-1}(q) \cap U = \{ a \in U \mid x_1(a) = \cdots = x_n(a) = 0 \}$ //

---

**射影空間** (projective space)

実射影空間 $\mathbb{RP}^n = \{ l \subset \mathbb{R}^{n+1} \mid l$ は 実1次元 部分ベクトル空間$\}$

複素射影空間 $\mathbb{CP}^n = \{ l \subset \mathbb{C}^{n+1} \mid l$ は 複素1次元 部分ベクトル空間$\}$

$\mathbb{R}^N$ に埋め込まれていない多様体の例

**商空間としての構成** $l \subset \mathbb{R}^{n+1}$ $l$ の生成元 $v$ をとる $l = \mathbb{R} \cdot v$

$\mathbb{R}v_1 = \mathbb{R}v_2 \iff {}^\exists \lambda \in \mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$v_1 = \lambda v_2$

従って $\mathbb{RP}^n = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$ 但し $v_1 \sim v_2$
$\underset{\text{def.}}{\iff} {}^\exists \lambda \in \mathbb{R}^\times,\ v_2 = \lambda v_1$

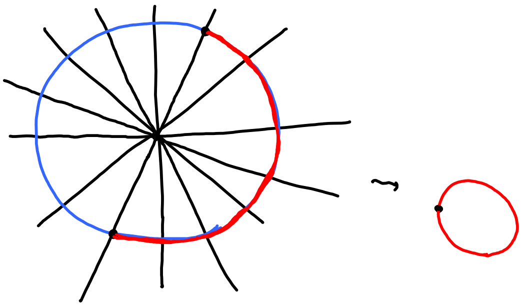
$\left( = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \mathbb{R}^\times \right.$ とも書く$\left. \right)$

• $\mathbb{RP}^n$ には $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ からの商位相が入る

$\pi : \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{RP}^n$ 自然な射影

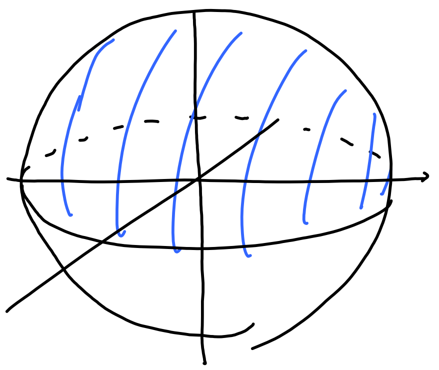
( $U \subset \mathbb{RP}^n$ が open $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\pi^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ の open )

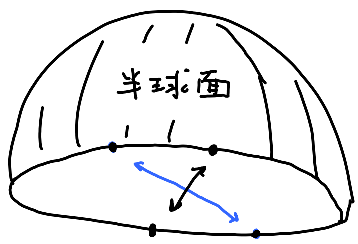
例 $\mathbb{RP}^1$　　$\mathbb{RP}^1 \cong S^1/(x,y)\sim(-x,-y) \cong S^1$



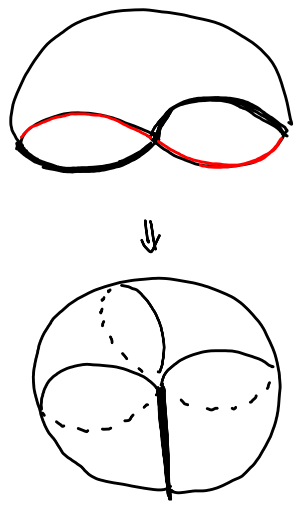
$\cong \mathbb{RP}^1$

例 $\mathbb{RP}^2$　　$\mathbb{RP}^2 \cong S^2/\pm 1$





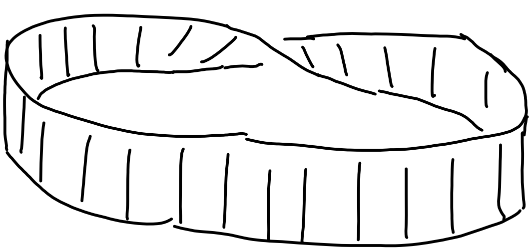

$\Rightarrow$



cross cap

• $\mathbb{R}^3$ には埋め込めないことが知られている。

• 赤道 $\subset S^2$ の像の近傍 $\cong$ Möbius の帯



定理　$\mathbb{RP}^n$ はコンパクトハウスドルフ空間

∵　$S^n \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{RP}^n$ は全射連続写像

有界閉集合ゆえコンパクト $\Rightarrow$ $\pi\circ i(S^n)$ はコンパクト

ハウスドルフ性はやや難（演習）

↑ 一般に商空間がハウスドルフであることを示すのは易しくない

## 局所座標 (chart)

$(x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ の同値類を $[x_1, \cdots, x_{n+1}] = \pi(x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{RP}^n$ と書く

[ $x_1, \cdots, x_{n+1}$ を斉次座標という (homogeneous coordinate) ]

$U_i := \{ [x_1, \cdots, x_{n+1}] \in \mathbb{RP}^n \mid x_i \neq 0 \}$ とおく.

- $\pi^{-1}(U_i) = \{ (x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \mid x_i \neq 0 \}$ は open ゆえ, $U_i$ は open

$\varphi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$

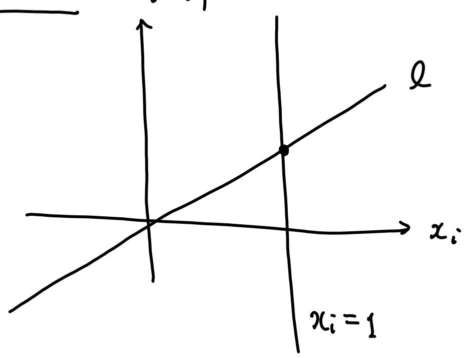
$$\varphi_i([x_1, \cdots, x_{n+1}]) = \left( \frac{x_1}{x_i}, \cdots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \cdots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right)$$ と定める.

$\rightsquigarrow$ $\varphi_i$ は well-defined, 全単射, 連続

容易

$\varphi_i \circ \pi : \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ が連続になることから分かる. (演習問7)

$\varphi_i$ のいみ




$\varphi_i(l) = l$ と超平面 $\{x_i = 1\}$ との交わり

$\varphi_i$ の逆写像 $\varphi_i^{-1}(y_1, \cdots, y_n) = [y_1, \cdots, y_{i-1}, 1, y_i, \cdots, y_n]$

$= \pi(y_1, \cdots, y_{i-1}, 1, y_i, \cdots, y_n)$

は連続 (∵ 連続写像の合成 $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{RP}^n$)

$\Longrightarrow$ $\varphi_i$ は同相写像である.

・これらの chart は $\mathbb{RP}^n$ を覆う　$\bigcup_{i=1}^{n+1} U_i = \mathbb{RP}^n$

・座標変換　$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$ は $C^\infty$ 級

[$i=1, j=2$ のとき]

$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(y_1, \dots, y_n) = \varphi_1([y_1, 1, y_2, \dots, y_n])$$
$$= \left(\frac{1}{y_1}, \frac{y_2}{y_1}, \dots, \frac{y_n}{y_1}\right)$$

(注) $\mathbb{RP}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の "コンパクト化"

$$\mathbb{RP}^n = \underbrace{U_1}_{} \sqcup \{[0, x_2, \dots, x_{n+1}]\} \cong \mathbb{R}^n \sqcup \mathbb{RP}^{n-1}$$

$\mathbb{RP}^n$ の open, dense subset になっている

⇝ 帰納的に $\mathbb{RP}^n = \mathbb{R}^n \sqcup \mathbb{R}^{n-1} \sqcup \cdots \sqcup \mathbb{R} \sqcup \underbrace{\mathbb{R}^0}_{1点}$ なる分解をもつ.

$\mathbb{CP}^n$ も同様

$$\mathbb{CP}^n = \{ l \subset \mathbb{C}^{n+1} \mid l \text{ は一次元 } \mathbb{C} \text{ 部分空間} \}$$
$$= (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \mathbb{C}^\times$$

$v_1 \sim v_2 \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}^\times \quad v_2 = \lambda v_1$ なる同値関係である

chart

$$U_i = \{ [x_1, \dots, x_{n+1}] \in \mathbb{CP}^n \mid x_i \neq 0 \}$$

$$\varphi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{C}^n \qquad \varphi_i(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right)$$

コンパクト性

$$\underbrace{S^{2n+1}}_{コンパクト} \subset \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{CP}^n \quad \text{の像ゆえコンパクト}$$

Hausdorff

座標変換は $C^\infty$ 級

演習　(さらに座標変換は正則であることもいえる ⇝ 複素多様体)

(例) $\mathbb{CP}^1 = U_1 \cup U_2$

$$U_1 = \{[x_1, x_2] \mid x_1 \neq 0\} \xrightarrow{\varphi_1} \mathbb{C}$$
$$[x_1, x_2] \longmapsto x_2/x_1 = z$$
$$U_2 = \{[x_1, x_2] \mid x_2 \neq 0\} \xrightarrow{\varphi_2} \mathbb{C}$$
$$[x_1, x_2] \longmapsto x_1/x_2 = w$$

座標変換は $w = z^{-1}$

$\rightsquigarrow$ 構成から $\mathbb{CP}^1$ と リーマン球面 $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ は微分同相

$$\mathbb{CP}^1 \cong \hat{\mathbb{C}} \cong S^2$$

---

<u>Hopf 写像</u> (Hopf fibration)

合成 $S^{2n+1} \overset{i}{\subset} \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \xrightarrow[\pi]{} \mathbb{CP}^n$ を Hopf 写像という

<u>定理</u> (演習問題 33, 56 参照)

Hopf 写像 $f: S^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{CP}^n$ は $C^\infty$級の沈め込み写像であり

${}^\forall q \in \mathbb{CP}^n$ に対して $f^{-1}(q)$ は $S^1$ と diffeo である.

(:) ・沈め込みについては演習 56の解答参照.

・ $f^{-1}([x_1, \cdots, x_{n+1}]) = \{(\lambda x_1, \cdots, \lambda x_{n+1}) \in S^{2n+1} \mid \lambda \in \mathbb{C}^\times\}$

$$\cong \{\lambda \in \mathbb{C}^\times \mid |\lambda|^2(|x_1|^2 + \cdots + |x_{n+1}|^2) = 1\}$$

$$\cong S^1$$

(diffeoになることは具体的に写像を書けば分かる)

・ $n=1$のとき

$S^3 \longrightarrow \mathbb{CP}^1 \cong S^2$ Hopf map

$\rightsquigarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} S^2 \text{ 上の非自明な } S^1 \text{束} \\ \pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z} \text{ の生成元} \end{array} \right.$