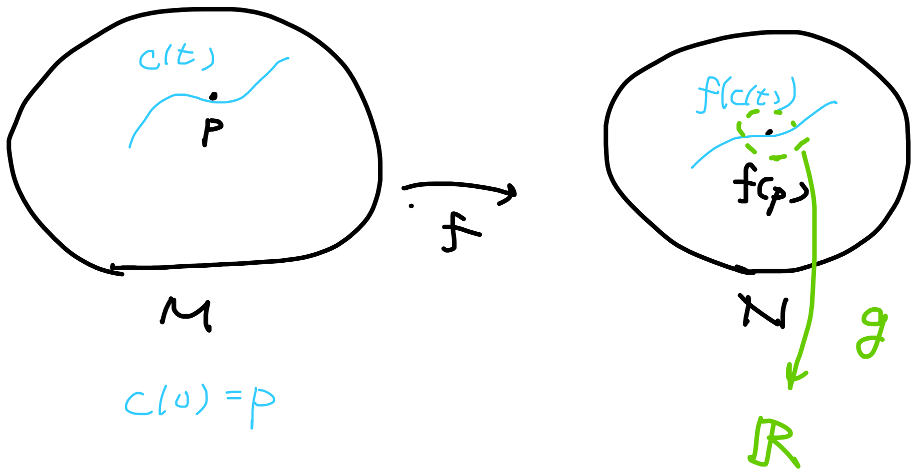
5回目

2020年5月27日　10:14

写像の微分　$f : M \to N$　C^∞ map

$\rightsquigarrow d_pf : T_pM \to T_{f(p)}N$



① 曲線による定義

$$\begin{array}{ccc} T_pM & \longrightarrow & T_{f(p)}N \\ \cup & & \cup \\ c\text{の同値類} & \longmapsto & f\circ c\text{の同値類} \\ \parallel & & \parallel \\ \dfrac{dc}{dt}(0) & & \dfrac{d(f\circ c)}{dt}(0) \end{array}$$

② 方向微分　　$v \in T_pM$: 方向微分と思う

$$d_pf(v)(g) := v(g \circ f)$$

g : $f(p)$のまわりのC^∞級関数

定理 (chain rule)　$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} Q$　　fは点pでC^∞級

$$p \qquad f(p)$$

g は $f(p)$ で C^∞ 級

$$\Rightarrow \quad d_p(g\circ f) = d_{f(p)}g \circ d_pf$$

∵ 曲線の同値類

$$\begin{tikzcd}
{[c]} \arrow[r, mapsto, "d_pf"'] \arrow[rr, mapsto, bend left, "d_p(g\circ f)"] & {[f\circ c]} \arrow[r, mapsto, "d_{f(p)}g"'] & {[g\circ(f\circ c)] = [(g\circ f)\circ c]} \\
T_pM \arrow[u, phantom, "\in" rotate=90] \arrow[r] & T_{f(p)}N \arrow[u, phantom, "\in"] \arrow[r] & T_{g(f(p))}Q \arrow[u, phantom, "\in"]
\end{tikzcd}$$

<u>座標で書く</u>

$$M \to N \to Q$$

$(x_1, \dots, x_m)$ $(y_1, \dots, y_n)$ $(z_1, \dots, z_q)$: 局所座標

$y_i = f_i(x_1, \dots, x_m)$: f の座標表示

$z_i = g_i(y_1, \dots, y_n)$: g 〃

$z_i = g(f_1(x), \dots, f_n(x))$: $g\circ f$ 〃

d_pf の行列表示（$\{\partial/\partial x_i\}$ $\{\partial/\partial y_j\}$ に関する）は Jacobi 行列

$$(Jf)_p := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_1(p), \cdots, x_m(p)) \right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}}$$

chain rule を座標でかくと

$$(J(g \circ f))_p = (Jg)_{f(p)} \cdot (Jf)_p$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\partial g_i(f_1(x), \cdots, f_n(x))}{\partial x_j} = \sum_k \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f_1(x), \cdots, f_n(x)) \quad \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x_1, \cdots, x_m)$$

系　f　$M \to N$　diffeo（微分同相写像）　C^∞ 級

$\Rightarrow$ d_pf　$T_pM \to T_{f(p)}N$ は同型

$\because$ $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_N$, $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_M$

$$\underset{\text{chain rule}}{\Longrightarrow} \begin{cases} d_p f \circ d_{f(p)} f^{-1} = d_{f(p)} \mathrm{id}_N = \mathrm{id}_{T_{f(p)} N} \\ d_{f(p)} f^{-1} \circ d_p f = d_p \mathrm{id}_M = \mathrm{id}_{T_p M} \end{cases}$$

$\therefore$ $d_p f$ は同型

系 $f : M \to N$ diffeo

$$\Longrightarrow \quad \underset{\substack{\| \\ \dim T_p M}}{\dim M} = \underset{\substack{\| \\ \dim T_{f(p)} N}}{\dim N}$$

逆関数定理とその応用

定理 $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^m$ open sets

$f : W_1 \longrightarrow W_2$ C^∞ map

$p \in W_1$ において f の Jacobi 行列 $(Jf)_p$ が 正則

$\Longrightarrow$ $^\exists U \subset W_1$: p の open nbd (neighborhood)

$^\exists V \subset W_2$: $f(p)$ の open nbd

s.t. $f(U) \subset V$ かつ $f|_U : U \to V$ は diffeo

(多様体の場合に翻訳) $f: \underset{p}{\hat{M}} \to N$ C^∞ map, d_pf は 線形同型 とする

C^∞ mfd

$\Longrightarrow$ $^\exists U$ 点 p の open nbd, $^\exists V$: 点 $f(p)$ の open nbd, s.t. $f(U) \subset V$, $f|_U$ $U \to V$ は diffeo

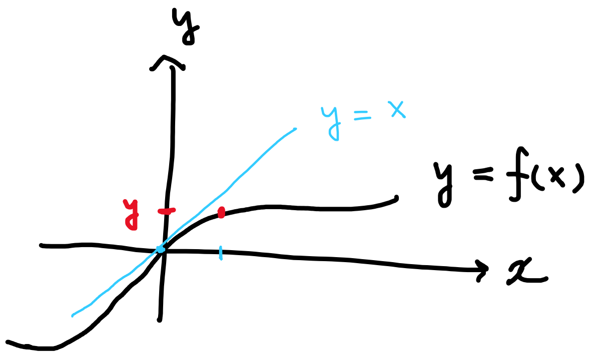
[証明の方針] $f : W_1 \longrightarrow W_2$

$\cap \qquad \cap$
$\mathbb{R}^m \qquad \mathbb{R}^m$

- 座標の平行移動で $p=0$, $f(p)=0$ としてよい
- f を $(Jf)_p^{-1}\circ f$ でおきかえて $(Jf)_p = E_m$ としてよい
- y が 0 に近いとき $f(x)=y$ を解きたい

(Taylor 展開: $f(x) = \underset{\underset{0}{\parallel}}{f(0)} + (Jf)_0 \cdot x + o(|x|)$)

$\approx x$



(Newton法)

x_n: 近似解 ≈ 0

$f(x_n+\delta) \fallingdotseq y$

$\parallel$

$f(x_n) + \delta$ $\delta = y - f(x_n)$ とおく

$\underline{x_{n+1} = x_n + \delta = x_n + y - f(x_n)}$ とおくとよりよい近似解

$x_0 = 0$, $x_1 = y$, $x_2 = 2y - f(y)$, ... $\longrightarrow$ 真の解

- $g_y(x) = x + y - f(x)$ とおく

$y = f(x) \iff g_y(x) = x$, つまり x は g_y の不動点

- y が十分小さいとき $g_y : \overline{B_\varepsilon(0)} \longrightarrow \overline{B_\varepsilon(0)}$ が縮小写像

になることを示すとよい $\rightsquigarrow$ $\exists!$ 不動点

陰関数定理

$U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$ open set

$f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ C^∞ map

$f : U \to \mathbb{R}^n$ C^∞ map

$(\underbrace{x_0}_{\mathbb{R}^m}, \underbrace{y_0}_{\mathbb{R}^n}) \in U$ $z_0 = f(x_0, y_0)$ とする

f を $\{x_0\} \times \mathbb{R}^n$ に制限したものの Jacobi行列

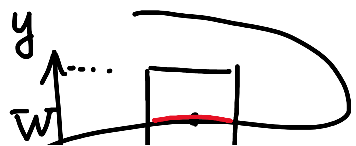
$$J\left(f|_{\{x_0\}\times\mathbb{R}^n}\right)_{y_0} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x_0, y_0)\right)_{1 \leq i,j \leq n}$$ が正則とする

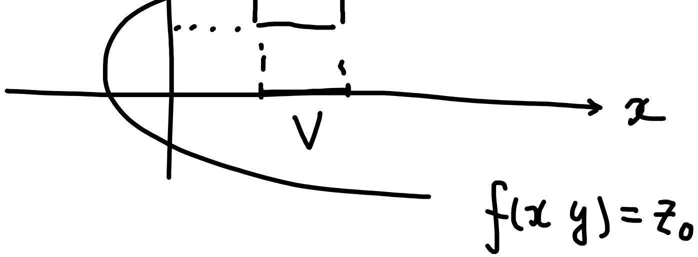
$\Rightarrow$ ${}^{\exists}V \subset \mathbb{R}^m$: x_0 の open nbd ${}^{\exists}\varphi : V \to W$ C^∞ map

${}^{\exists}W \subset \mathbb{R}^n$: y_0 の open nbd

s.t. $V \times W \subset U$ であって ${}^{\forall}(x,y) \in V \times W$ に対して

$$y = \varphi(x) \iff f(x,y) = z_0$$





$$\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \supset U$$

∵ 逆関数定理から導く　　　$f : U \to \mathbb{R}^n$

$$F : U \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$$

$F(x,y) = (x, f(x,y))$ とおく

$$(JF)_{x_0,y_0} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overleftrightarrow{\;m\;} & \overleftrightarrow{\;n\;} \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} E_m & O \\ \hline \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} & \dfrac{\partial f_i}{\partial y_j} \end{array}\right] \end{array}$$ は正則行列

正則

Fに逆関数定理を適用して

$$\begin{cases} A \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n : (x_0, y_0) \text{ の open nbd} \\ B \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n : (x_0, z_0) \quad 〃 \end{cases} \qquad F(A) \subset B, \quad F|_A : A \to B \ \text{diffeo}$$

- A を小さくとり直して $A = \tilde{V} \times W$ の形としてよい
- F^{-1} は

$$\begin{aligned} F^{-1} \quad B &\longrightarrow A = \tilde{V} \times W \\ \rotatebox{90}{$\in$} \quad & \qquad\qquad \rotatebox{90}{$\in$} \\ (x, z) &\longmapsto (x, \underbrace{\varphi(x, z)}_{C^\infty \text{ map}}) \end{aligned}$$

の形をしている

$$V = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (x, z_0) \in B \}$$ とおくとき

- V は x_0 を含む open set
- $V \subset \tilde{V}$ 　　$x \in V$ なら $F^{-1}(x, z_0) \in A = \tilde{V} \times W$

$$F^{-1}(x, z_0) = (x, \varphi(x, z_0)) \qquad \therefore x \in \tilde{V}$$

$(x, y) \in V \times W$ に対して

$$f(x,y) = z_0 \iff \underbrace{F(x,y)}_{A} = \underbrace{(x, z_0)}_{B}$$

$$\iff (x, y) = F^{-1}(x, z_0)$$

$$\iff y = \varphi(x, z_0)$$

より　$\varphi(x) = \varphi(x, z_0)$ とおけばよい //

はめ込み と しずめ込み

はめ込み ← immersion

しずめ込み ← submersion

<u>定義</u>　$f : M \to N$　C^∞ map

① fが $p \in M$ で はめ込み $\iff$ $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$

f が 点 $p \in M$ で はめ込み ⟺ d_pf $T_pM \to T_{f(p)}N$

が 単射

② f が 点 $p \in M$ で 沈め込み ⟺ d_pf $T_pM \to T_{f(p)}N$

が 全射

定義 f $M \to N$ が はめ込み (沈め込み) ⟺ $\forall p \in M$ で f は はめ込み (沈め込み)

定理 C^∞ map $f : M^m \to N^n$ が 点 p で はめこみ のとき

江えは

$m \leq n$

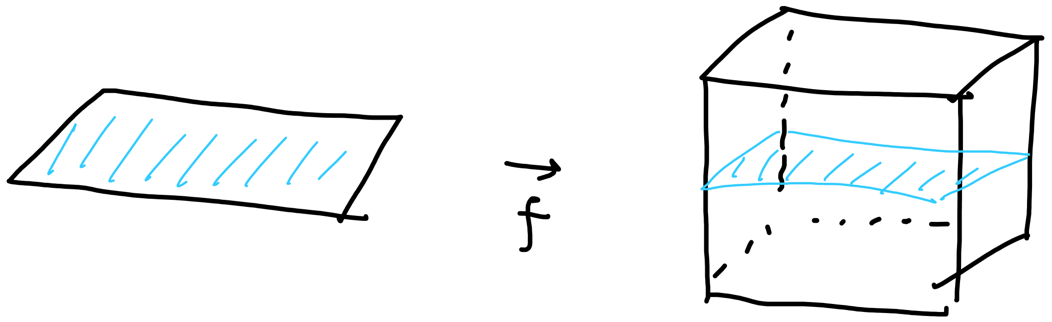
点 p の 近くの 局所座標 $^\exists(U : x_1, \cdots, x_m)$

点 $f(p)$ 〃 $^\exists(V : y_1, \cdots, y_n)$

s.t
- $x_i(p) = 0$, $y_j(f(p)) = 0$
- $f(U) \subset V$, f の 座標 表示 は

$$(x_1, \cdots, x_m) \longmapsto (y_1, \cdots, y_n)$$
$$= (x_1, \cdots, x_m, \underbrace{0, \cdots, 0}_{n-m \text{コ}})$$

で与えられる



∵ 座標をとって $\underset{\text{open}}{M \subset \mathbb{R}^m}$, $\underset{\text{open}}{N \subset \mathbb{R}^n}$ の場合に帰着。

さらに $p = 0$, $f(p) = 0$ としてよい

$d_0 f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ は単射

$\| \, (Jf)_0$

⇝ $(Jf)_0$ の列ベクトルに $v_{m+1}, \cdots, v_n \in \mathbb{R}^n$ を

つけ加えて $\mathbb{R}^n$ の基底がつくれる

$\tilde{f}: M \times \mathbb{R}^{n-m} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ C^∞ map

$$(x_1, \cdots, x_m, x_{m+1}, \cdots, x_n) \longmapsto f(x_1, \cdots, x_m) + \sum_{j=m+1}^{n} x_j \vec{v}_j$$

$$(J\tilde{f})_0 = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} (Jf)_0 & \vec{v}_{m+1}, \cdots, \vec{v}_n \end{array}\right]}_{m \quad | \quad n-m} \updownarrow n$$

は正則行列

逆関数定理より

$\exists\, \tilde{U} \subset M \times \mathbb{R}^{n-m}$, $\exists\, V \subset N$ $\Big\}$ 0 の open nbd

$$\tilde{f}|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \longrightarrow V \quad \text{diffeo}$$

$(\tilde{f}|_{\tilde{U}})^{-1}$ を V の座標 にとる

$U = \{ x \in M \mid (x, 0) \in \tilde{U} \}$ とおく

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f|_U"] & V \arrow[r, "(\tilde{f}|_{\tilde{U}})^{-1}", "\cong"'] & \tilde{U} \\ \tilde{U} \arrow[u, phantom, "\cap"] \arrow[ur, "\tilde{f}|_{\tilde{U}}"'] & & \end{tikzcd}$$

f の座標表示

$$(x_1, \cdots, x_m) \overset{f}{\longmapsto} f(x_1, \cdots, x_m) \overset{(\tilde{f}|_{\tilde{U}})^{-1}}{\longmapsto} (x_1, \cdots, x_m, 0, \cdots, 0)$$

$$(x_1, \cdots, x_m, 0, \cdots, 0) \overset{\tilde{f}}{\longmapsto} f(x_1, \cdots, x_m)$$

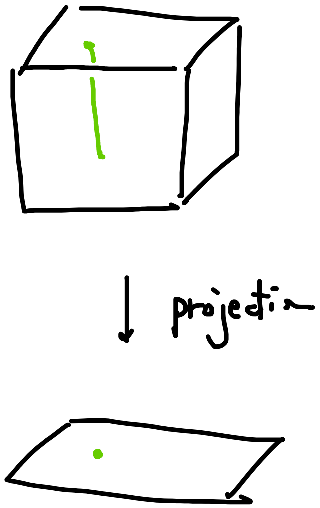
//

定理 $f : M^m \to N^n$ が点 p で沈め込み であるとき

$m \leq n$

$^{\exists}$ p の座標近傍 $(U; x_1, \dots, x_m)$

$f(p)$ の $^{\exists}(V; y_1, \dots, y_n)$



s.t. $x_i(p) = 0$, $y_j(f(p)) = 0$, $f(U) \subset V$

f の座標表示は

$$(x_1, \dots, x_m) \longmapsto \underbrace{(y_1, \dots, y_n)}_{\text{最初のn成分への射影}} = (x_1, \dots, x_n)$$

と与えられる