4回目

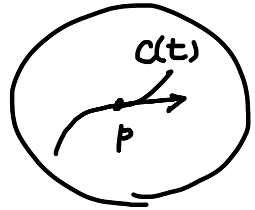
2020年5月19日 15:48

M: C^∞級多様体 (C^∞ mfd)

T_pM : 点 $p \in M$ での接空間

(第1の定義) $T_pM = \{p を通る曲線\}/\sim$

↑ 速度ベクトル



$c : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ C^∞ map

$c(0) = p$

(第2の定義) 微分作用素 (方向微分)

f : 点 p のまわりの C^∞級関数

$$f \longmapsto \frac{d}{dt} f(c(t)) \Big|_{t=0}$$

; c に沿った方向微分

定義 点 $p \in M$ での <u>方向微分</u> とは 点 p の近傍で定義された C^∞級関数 f に対して 実数 $v(f)$ を対応させるもので

⓪ f と g が p のある近傍で一致していたら、$v(f) = v(g)$

① $v(af + bg) = a\,v(f) + b\,v(g)$ $(a, b \in \mathbb{R})$

② $v(fg) = f(p) \cdot v(g) + g(p)\,v(f)$ (Leibniz rule)

② $v(f\,g) = f(p)\,v(g) + g(p)\,v(f)$

をみたすもの

命題

$$c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \quad C^\infty \text{map}, \quad c(0) = p$$

$$\underbrace{f}_{p\text{のまわりの}C^\infty\text{級}} \longmapsto v_c(f) := \frac{d}{dt} f(c(t))\Big|_{t=0}$$

は 点 p での方向微分である

∵ ②
$$v_c(f\cdot g) = \frac{d}{dt}\bigl(f(c(t))\,g(c(t))\bigr)\Big|_{t=0}$$

$$= \frac{d f(c(t))}{dt}\Big|_{t=0} g(c(0)) + f(c(0)) \cdot \frac{d g(c(t))}{dt}\Big|_{t=0}$$

$$= v_c(f)\cdot g(p) + f(p)\cdot v_c(g) \quad //$$

定義

定義 $T_pM = \{$点 p での方向微分$\}$ (※2の定義)

命題 T_pM は $\mathbb{R}$ ベクトル空間の構造をもつ.

v, w: 方向微分 $\Rightarrow$ $a\cdot v + b w$ も方向微分 $a, b \in \mathbb{R}$

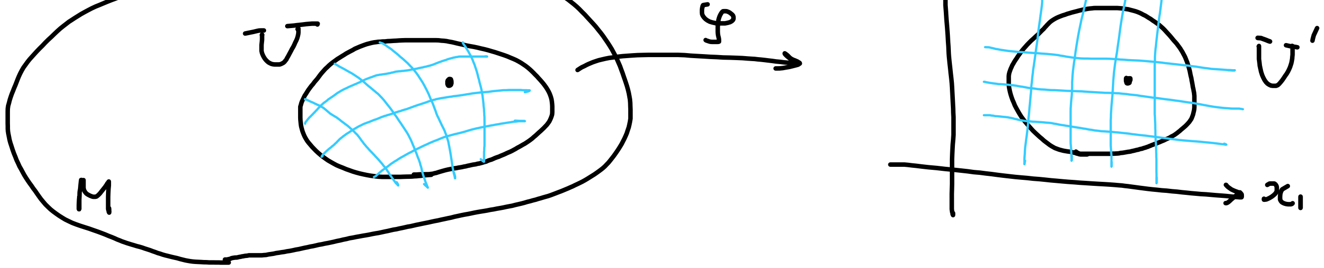
$$f \longmapsto a\cdot v(f) + b\cdot w(f)$$

今後の記号

(U, φ) chart $\quad$ $\begin{array}{ccc} M & & \mathbb{R}^m \\ \cup & & \cup \\ \varphi: U & \xrightarrow{\cong} & U' \end{array}$

・ $\varphi(p) = (x_1(p), \cdots, x_m(p))$ の形に書くとき 各 x_i は U 上の C^∞ 級関数

(U, φ) を $(U; x_1, \cdots, x_m)$ と書くことがある



座標 $(x_1, \cdots, x_m)$ が U 上に「描かれている」と考える

- $f\ U \longrightarrow \mathbb{R}$ の座標表示 $f \circ \varphi^{-1} : U' \longrightarrow \mathbb{R}$

のことを記号の濫用により $f(x_1, \cdots, x_m)$ と書く

$$\begin{gathered} f(x_1, \cdots, x_m) \\ \| \\ \left(f \circ \varphi^{-1} (x_1, \cdots, x_m) \right) \end{gathered}$$

点 p を含む chart $(U, \varphi) = (U; x_1, \cdots, x_m)$

p のまわりの C^∞ 級関数 $f(x_1, \cdots, x_m)$ に対して $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ の点 p での値

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) := \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i} (x_1(p), \cdots, x_m(p))$$

(正確には)

を対応させる写像は点 p での方向微分になる

これを $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \in T_pM$ と書く.

注 曲線 $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ を

$$c(t) = \varphi^{-1}\left(x_1(p), x_2(p), \cdots, x_i(p)+t, \cdots, x_m(p)\right)$$

と定めるとき $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)_p = v_c$ (c に沿った方向微分)

__定理__ $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \cdots, \left(\dfrac{\partial}{\partial x_m}\right)_p$ は T_pM の $\mathbb{R}$ 上の基底

∵ [一次独立性] $x_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ C^∞ 関数

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) x_j = \delta_{ij}$$

もし $\underline{\sum_{j=1}^{m} a_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p} = 0$ ならば x_i に作用させて $a_i = 0$ がいえる //

[T_pM を生成すること] $v \in T_pM$ 方向微分

$1 : M \longrightarrow \mathbb{R}$ 定数関数

$$v(1) = v(1 \cdot 1) = 1 \cdot v(1) + v(1)\, 1$$

$$\therefore \quad v(1) = 0$$

さらに $\forall a \in \mathbb{R}$ に対して $v(a) = a \cdot v(1) = 0$

<u>Lemma</u> $f(x_1, \cdots, x_m)$: $0 \in \mathbb{R}^m$ の近傍で定義された C^∞ 級関数

$\Rightarrow$ 0 の近傍で定義された C^∞ 級関数 $g_{ij}(x_1, \cdots, x_m)$ が存在して

$$f(x_1, \dots, x_m) = f(0) + \sum_{i=1}^{m} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) + \sum_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le m}} x_i x_j g_{ij}(x)$$

座標 x_i を $x_i - \underset{\text{const}}{\underline{x_i(p)}}$ とおきかえて，$x_1(p) = x_2(p) = \cdots = x_m(p) = 0$ と仮定してよい

f p のまわりの C^∞ 関数 に対して 上の Lemma をつかう

$$v(f) = \underbrace{v(f(0))}_{=0} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) \cdot v(x_i) + \underbrace{\sum_{i,j} v(x_i x_j g_{ij}(x))}_{\text{Leibniz rule より } 0}$$

$$v(x_i x_j g_{ij}) = \underline{v(x_i)} \underbrace{x_j(p)}_{=0} g_{ij}(p) + \underbrace{x_i(p)}_{=0} \underline{v(x_j)} g_{ij}(p) + \underbrace{x_i(p) x_j(p)}_{=0} \underline{v(g_{ij})} = 0$$

$$\therefore \quad v(f) = \sum_{i=1}^{m} v(x_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) = \sum_{i=1}^{m} v(x_i) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) f$$

$$\therefore \quad v = \sum_{i=1}^{m} v(x_i) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \qquad //$$

曲線に沿った方向微分　　$c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$　C^∞ curve，$c(0) = p$

$$v_c(f) = \frac{d}{dt} f(c(t)) \Big|_{t=0}$$ であった

$c(t)$ の座標表示　　$\varphi(c(t)) = (c_1(t), \cdots, c_m(t))$ とおく

つまり　$c_i(t) = x_i(c(t))$

$$v_c(f) = \frac{d}{dt} f(c_1(t), \cdots, c_m(t)) \Big|_{t=0}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}(c_1(0), \cdots, c_m(0))}_{\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)} \cdot \frac{dc_i}{dt}(0)$$

よって $v_c = \sum_{i=1}^{m} \frac{dc_i}{dt}(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ ⇝ 第1の定義と第2の定義は同値

以下では v_cのことを $\frac{dc}{dt}(0)$ or $\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=0}$ とも書く

座標変換

$(U, x_1, \cdots, x_m) = (U, \varphi)$ $\quad p \in U \cap V$

$(V; y_1, \cdots, y_m) = (V, \psi)$

charts

座標変換を与える関数を

$$x_i = x_i(y_1, \cdots, y_m) \quad \left(\underset{\text{正確には}}{=} \ \varphi \circ \psi^{-1}(y_1, \cdots, y_m) \text{ の 第 } i \text{ 成分} \right)$$

と書く

定理

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_p = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial x_i}{\partial y_j}(p) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$$

正確には $\frac{\partial x_i}{\partial y_j}(y_1(p), \cdots, y_m(p))$

:) $f(x_1, \cdots, x_m)$: p のまわりの C^∞ 関数を x 座標で表示したもの

$x_i = x_i(y)$ を代入すると y 座標表示になる

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_p f = \frac{\partial}{\partial y_j} f(x_1(y), \cdots, x_m(y)) \Big|_{y = y(p)}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot \frac{\partial x_i}{\partial y_j}(p)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial x_i}{\partial y_j}(p) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p f \quad //$$

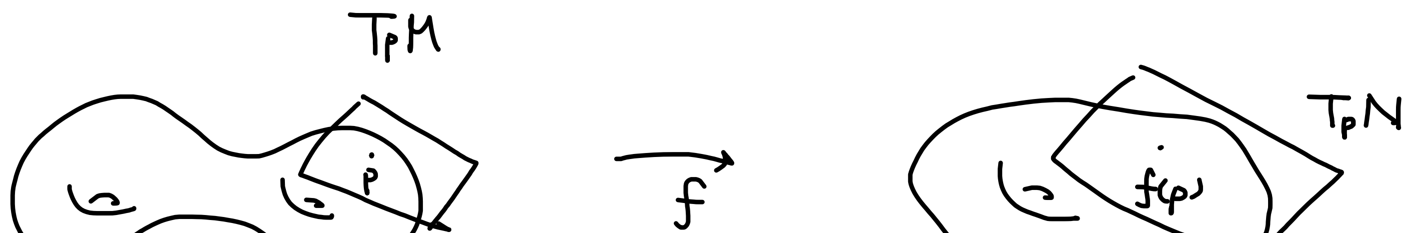
写像の微分

$f : M^m \longrightarrow N^n$ 　点 p (の近傍) で C^∞ 級

に対して 線形写像 $\underline{d_p f} : T_pM \longrightarrow T_pN$ を定めたい

f を点 p のまわりで線形近似

(df_p とも)　　　　(微分 あるいは 接写像)



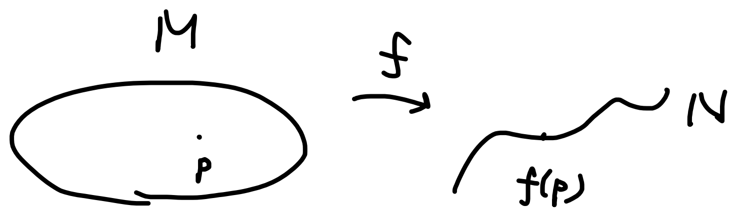
(曲線をつかった定義)　$c:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$　C^∞ map,　$c(0)=p$

$\leadsto$ $\underbrace{f\circ c}_{\uparrow}:(-\varepsilon,\varepsilon)\to N$　　$f\circ c(0)=f(p)$

t=0の近くで C^∞級

d_pf は (曲線 c の同値類) を (曲線 $f\circ c$ の同値類)

に写すものと定義する



局所座標をつかった計算

$(U,\varphi)=(U;\ x_1,\dots,x_m)$: 点 p を含む chart

$(V,\psi)=(V;\ y_1,\dots,y_n)$　点 $f(p)$ を含む chart　s.t.　$f(U)\subset V$

$c(t)$ の座標表示を $(c_1(t), \cdots, c_m(t))$

f の座標表示 $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})$ を $\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \cdots, x_m) \\ \vdots \\ y_n = f_n(x_1, \cdots, x_m) \end{cases}$ とする

$f \circ c(t)$ の座標表示 $\left(f_1(c_1(t), \cdots, c_m(t)), \cdots, f_n(c_1(t), \cdots, c_m(t)) \right)$

- c に沿った方向微分は先ほどの計算から

$$\frac{dc}{dt}(0) = v_c = \underline{\sum_{i=1}^{m} \frac{dc_i}{dt}(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p} \leftarrow$$

- $f \circ c$ に沿った方向微分は

$$\frac{d(f \circ c)}{dt}(0) = \sum_{i=1}^{n} \left. \frac{d f_i(c_1(t), \cdots, c_m(t))}{dt} \right|_{t=0} \left(\frac{\partial}{\partial y_i} \right)_{f(p)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \frac{dc_j}{dt}(0) \left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_{f(p)}$$

$\because$ $\frac{dc}{dt}(0)$のみで決まっている

$\Rightarrow$ $d_p f : T_p M \to T_{f(p)} N$ は well-defined で

$$\frac{dc}{dt}(0) \longmapsto \frac{d(f \circ c)}{dt}(0)$$

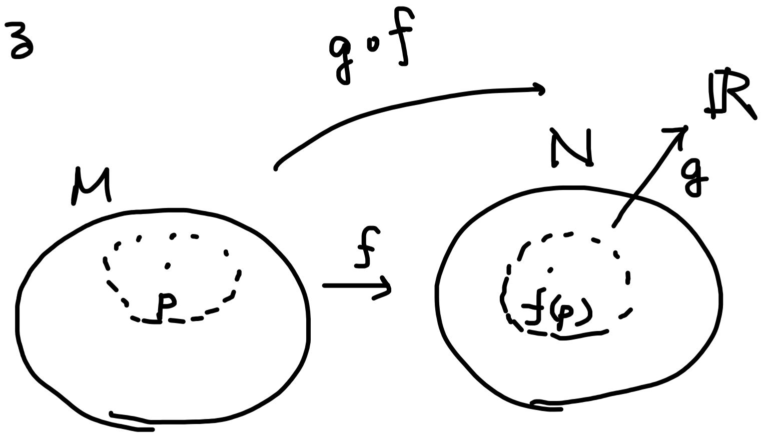
基底 $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$, $\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_{f(p)}$ に関する行列表示が

Jacobi行列 $\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p) \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ で与えられる線形写像

（方向微分による定義）

$v \in T_pM$ ：点 p での方向微分 に対して 点 $f(p) \in N$

での方向微分 $d_pf(v)$ を次のように定める



$f(p)$のまわりの C^∞関数 g に対して

$g\circ f$ は pのまわりの C^∞関数

$$d_pf(v) : g \longmapsto v(g\circ f)$$

← これは方向微分になる（演習）

この定義は曲線によるものと一致

$v = \dfrac{dc}{dt}(0)$ なる曲線 $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ をとる

$$\underbrace{\frac{d(f\circ c)}{dt}(0)}_{\text{方向微分と思う}}(g) = v_{f\circ c}(g)$$

$$= \frac{d}{dt}\, g(f\circ c(t))\Big|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt}(g\circ f)(c(t))\Big|_{t=0}$$

$$= v_c(g\circ f)$$

$$= \frac{dc}{dt}(0)\,(g\circ f) = \underbrace{v(g\circ f)}_{\text{上の定義}}$$