3回目

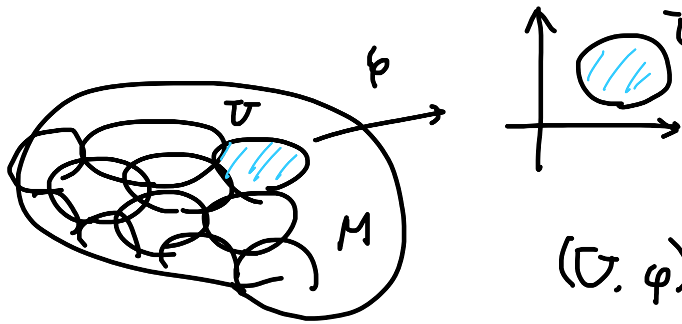
2020年5月12日　17:23

多様体上のC^∞級関数

$(\underbrace{M^m}_{\cdots}, \underset{\text{アトラス}}{\mathcal{S}})$: $\overbrace{C^\infty}^{\text{級}}$多様体

(C^∞ mfd)

$\mathcal{M}(\mathcal{S})$: 極大アトラス



(U, φ) : chart

chartの集まり（Mをおおう）

= アトラス

定義：　$f : M \to \mathbb{R}$ が点 p (の近傍) で C^∞級

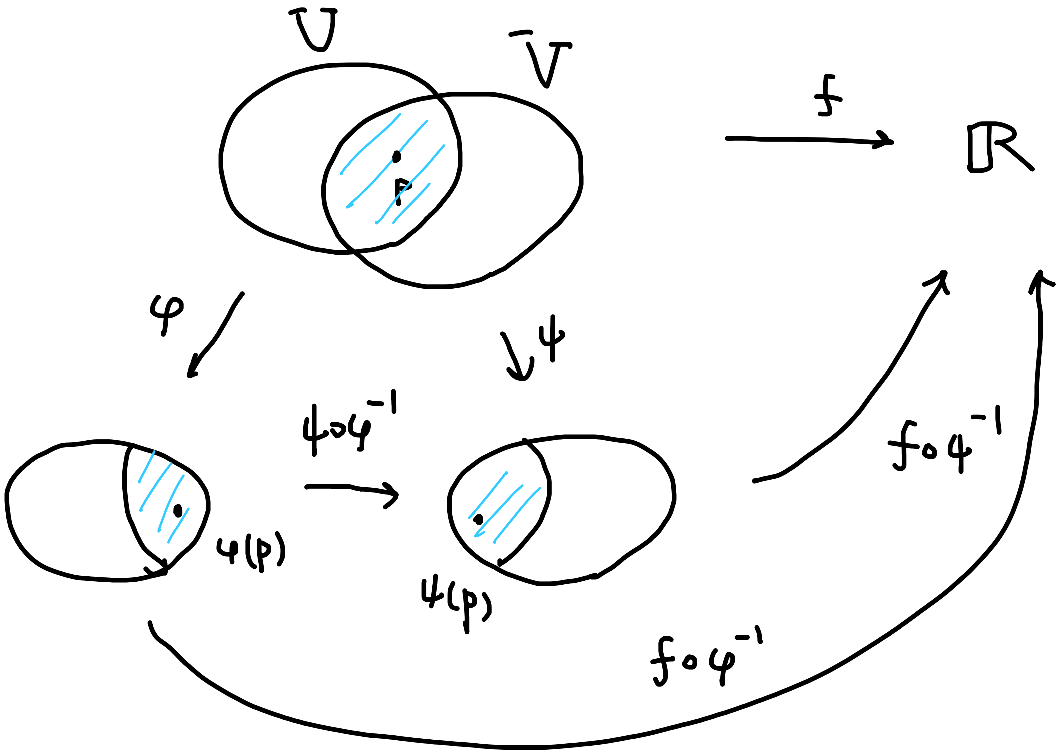
$\Longleftrightarrow$　$^\exists p$を含むchart $(U, \varphi) \in \mathcal{M}(\mathcal{S})$

s.t.　$f \circ \varphi^{-1} : U' \xrightarrow[\varphi^{-1}]{} U \xrightarrow[f]{} \mathbb{R}$ は $\underline{\varphi(p)\text{の近傍で}}$ C^∞級

$f\circ\varphi^{-1}$

注 この定義は pを含む C^∞ chart (U,φ) のとり方によらない

(V,ψ): pを含む別の chart $\in \mathcal{M}(\mathcal{S})$



$\varphi(U\cap V)$ 上で

$$f\circ\varphi^{-1} = (f\circ\psi^{-1})\circ\underbrace{(\psi\circ\varphi^{-1})}_{C^\infty\text{級同相}}$$

なので

$f\circ\varphi^{-1}$ が $\varphi(p)$ の近傍で C^∞級

$\Longleftrightarrow$ $f\circ\psi^{-1}$ が $\psi(p)$ の近傍で C^∞級

注 $f: M\to\mathbb{R}$ が 点pで C^∞級 $\Rightarrow$ fは点pで連続

定義： $f: M \to \mathbb{R}$ C^∞級 $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^\forall p \in M$ に対して f は点 p で C^∞級

($\Longleftrightarrow$ ${}^\forall (U, \varphi) \in \mathcal{S}$ に対して $f \circ \varphi^{-1}$ が C^∞級)

C^∞級写像 (C^∞ map)

以下では M^m, N^n ： C^∞級多様体 (C^∞ mfd)

定義 $f: M \to N$ が点 $p \in M$ (の近傍) で C^∞級とは

${}^\exists (U, \varphi)$ ： p を含む M の chart

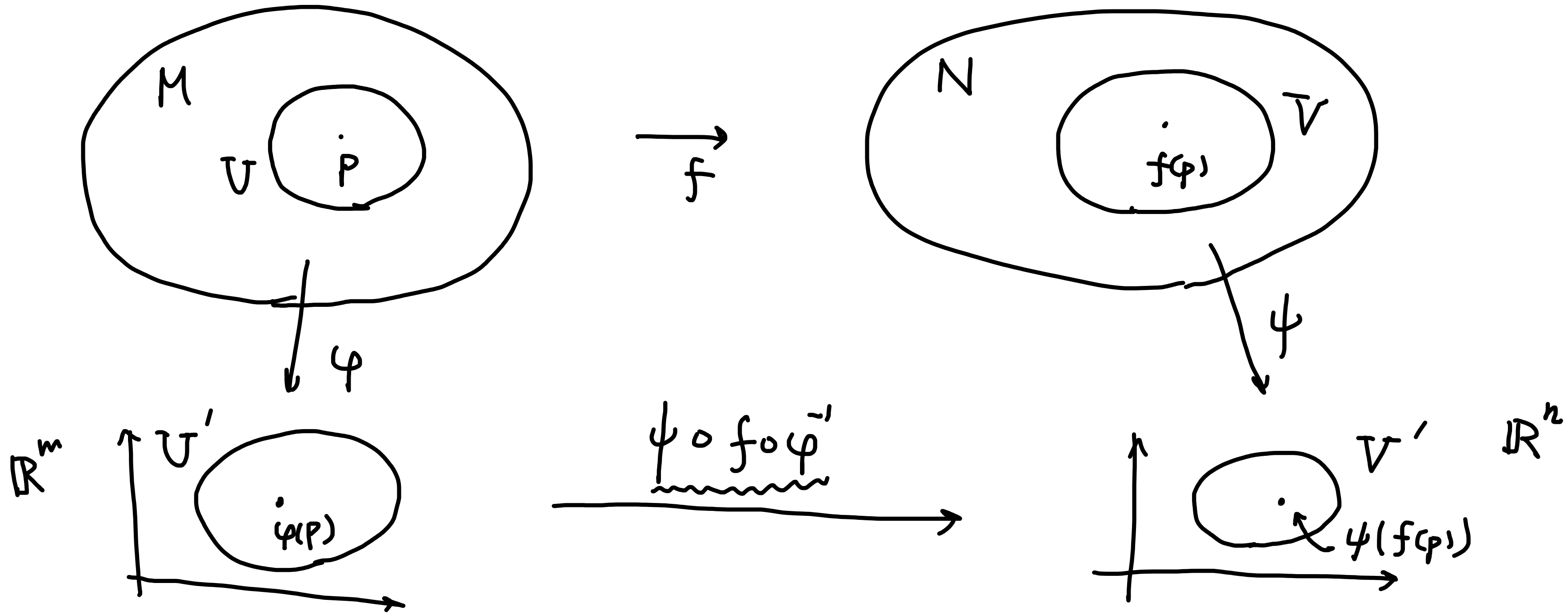
${}^\exists (V, \psi)$ ： $f(p)$ を含む N の chart

が存在して

…の連続性から U を小さくとり直せば

① $f(U) \subset V$ ← (もし f が連続なら U と
①のようにできる)

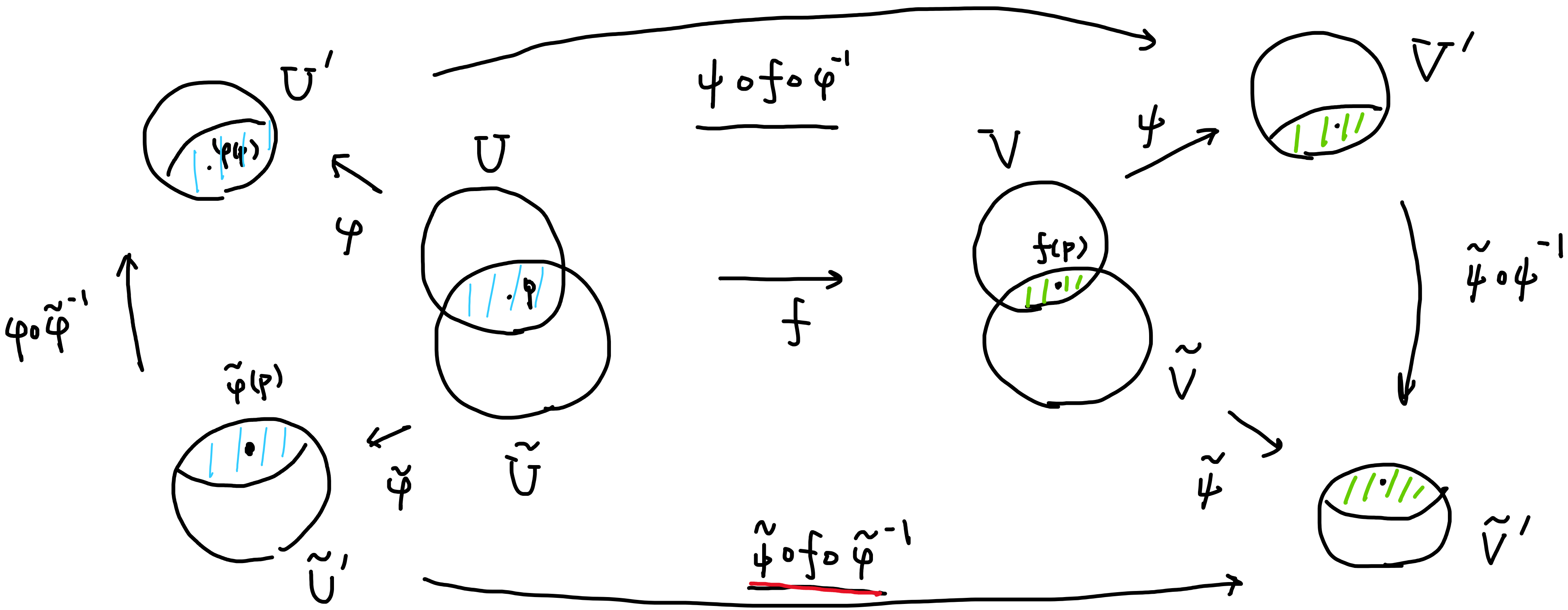
② $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \underset{\varphi(U)}{\underset{\shortparallel}{U'}} \longrightarrow \underset{\psi(V)}{\underset{\shortparallel}{V'}}$ は点 $\varphi(p)$ の近傍で C^∞ 級



注 この定義は chart のとり方によらない

$(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ pを含む chart　$\{$　$f(\tilde{U}) \subset \tilde{V}$ とする

$(\tilde{V}, \tilde{\psi})$ $f(p)$



$\tilde{\psi}\circ f\circ\tilde{\varphi}^{-1} = (\tilde{\psi}\circ\psi^{-1})\circ(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})\circ(\varphi\circ\tilde{\varphi}^{-1})$ も $\tilde{\varphi}(p)$ の近傍で C^∞級

$\tilde{\varphi}(U\cap\tilde{U})$ 上で定義

注　$f: M\to N$ が点pで C^∞級 $\Rightarrow$ fは点pで連続

定義　$f: M\to N$ が C^∞ map $\Longleftrightarrow$ $\forall p\in M$ に対して f は p で C^∞級

def.

例

① C^∞級関数 $f \quad M \to \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ に自然な C^∞ mfd の構造を入れると C^∞写像になる

② $c : (a, b) \longrightarrow M$ $\quad C^\infty$ map を C^∞級曲線という

(a,b)：開区間 ← C^∞ mfd

(C^∞ curve)

③ $U \subset M$ open set ⇝ U は C^∞ mfd の構造をもつ

(開部分多様体)

⇝ $i : U \hookrightarrow M$ 包含写像は C^∞級

④ Möbius 変換 (一次分数変換)

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad z \in \mathbb{C},\quad a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

$ad-bc \neq 0$ とする ← $ad = bc$ なら $(a, b) \mathbin{/\!/} (c, d)$ となり $f(z)$ は定数

は C^∞ map $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ に拡張される

$(\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\})$

・定義は次の通り

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{az+b}{cz+d} & cz+d \neq 0 \text{ のとき} \\ \infty & cz+d = 0 \text{ のとき}\ (\text{このとき } az+b \neq 0) \\ \dfrac{a}{c} & z = \infty,\ c \neq 0 \text{ のとき} \\ \infty & z = \infty,\ c = 0 \text{ のとき}\ (\text{このとき } a \neq 0) \end{cases}$$

以下では $c \neq 0$ とする. f が C^∞ map を示したい

$\hat{\mathbb{C}}$ の chart (U_1, φ_1), (U_2, φ_2)

$U_1 = \mathbb{C}$, $\varphi_1(z) = z$

$U_2 = \mathbb{C}^\times \cup \{\infty\}$, $\varphi_2(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} & z \neq \infty \\ 0 & z = \infty \end{cases}$

① $z \neq -\frac{d}{c}, \infty$ のとき

$f\Big|_{\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}} : \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \longrightarrow \mathbb{C}$

(U_1, φ_1) をここに制限して得られる chart $(\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}, \varphi_1)$

chart (U_1, φ_1) をとる

$\varphi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}(z) = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ が $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ 上 C^∞級 は明らか

② $z = -\frac{d}{c}$ で C^∞級 であること $f(-\frac{d}{c}) = \infty$ $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$

$f\left(U_1 \setminus \left\{z = -\frac{b}{a}\right\}\right) \subset U_2$ に注意する

chart (U_1, φ_1) をここに制限

$-\frac{d}{c}$ を含む

$\left(-\frac{b}{a} \neq -\frac{d}{c}\right)$

$a=0$ のときは除かなくてよい

∞ を含む chart

$\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{b}{a}\right\} \longrightarrow \mathbb{C}$ を計算

$$(\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1})(z) = \begin{cases} \varphi_2\left(\dfrac{az+b}{cz+d}\right) & cz+d \neq 0 \text{ のとき} \\ \varphi_2(\infty) & cz+d = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{cz+d}{az+b} & cz+d \neq 0 \\ 0 & cz+d = 0 \end{cases}$$

$$= \frac{cz+a}{az+b}$$ は $z = -\frac{a}{c}$ の近傍で C^∞ 級

③ $z=\infty$ の近傍で C^∞ 級であること　　$f(\infty) = \frac{a}{c} \in U_1$

$f\left(U_2 \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} \right) \subset U_1$ に注意　　$f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$

$\varphi_1 \circ f \circ \varphi_2^{-1} : \varphi_2\left(U_2 \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}\right) \longrightarrow \mathbb{C}$ を計算

$$(\varphi_1 \circ f \circ \varphi_2^{-1})(w) = \begin{cases} f(1/w) & w \neq 0 \\ f(\infty) & w = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{a/w + b}{c/w + d} = \dfrac{a+bw}{c+dw} & w \neq 0 \\ a/c & w = 0 \end{cases}$$

$$= \frac{a+bw}{c+dw} \quad \text{は} \quad w = 0 = \varphi_2(\infty) \ \text{で}$$

C^∞ 級

定理 $f : M \to N,\ \ g : N \to Q \ :\ C^\infty$ map

$\Longrightarrow \quad g \circ f \ \ M \to Q$ は C^∞ map　（演習）

定義 $f : M \longrightarrow N$ が C^∞ 級同相写像（diffeomorphism）

$\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$
① f は全単射
② f と f^{-1} は共に C^∞ map

このとき M と N は C^∞ 級同相という

(注) f C^∞ 級同相 $\Rightarrow$ f 同相

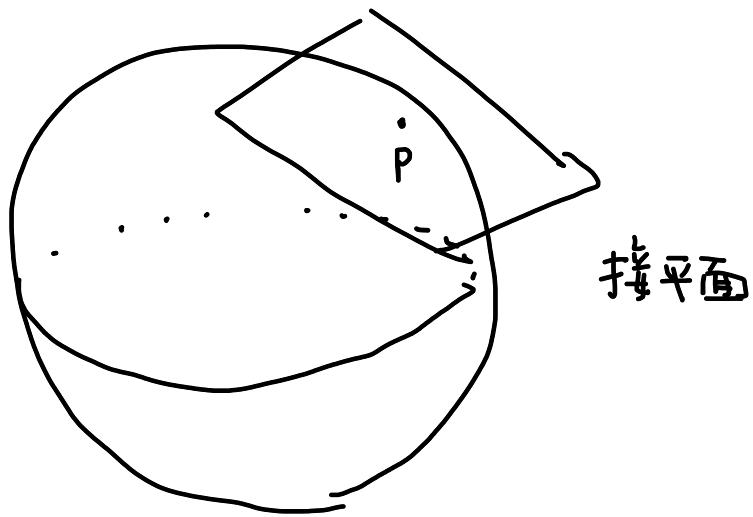
(例) $f(\ \ ) = \frac{az+b}{\ \ }$: $\hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ は diff

(例) $ad-bc \neq 0$ のとき $f(z) = \dfrac{\cdots}{cz+d} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ は diffeo になる

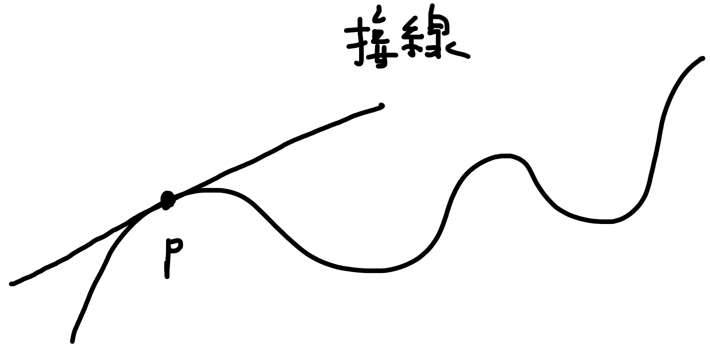
接空間 (tangent space)

接ベクトル空間ともいう

$\mathbb{R}^n$ 内に実現される多様体の接空間 T_pM



S^2



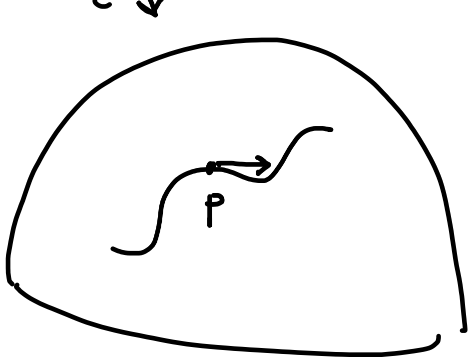
「p のまわりで多様体をベクトル空間で近似する」

抽象的な多様体の接空間とは？

接ベクトル

$c: (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ C^∞曲線

$c(0) = p$



"$\dfrac{dc}{dt}(0)$" を定義したい

C^∞ function

pを含む chart (U, φ) をとり

$$\varphi(c(t)) = (c_1(t), \cdots, c_m(t))$$

$$\text{“}\frac{dc}{dt}(0)\text{”} = \left(\frac{dc_1}{dt}(0), \cdots, \frac{dc_m}{dt}(0)\right)$$

これは座標のとり方による

$c(0) = p$ となるもの

点pを通る C^∞級曲線に次の同値関係を入れる

$c \sim \tilde{c} \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $^\exists p$を含む chart (U, φ)

$$\varphi(c(t)) = (c_1(t), \cdots, c_m(t))$$

$$\varphi(\tilde{c}(t)) = (\tilde{c}_1(t), \dots, \tilde{c}_m(t))$$ とおくとき

$$\left(\frac{dc_1}{dt}(0), \dots, \frac{dc_m}{dt}(0)\right) = \left(\frac{d\tilde{c}_1}{dt}(0), \dots, \frac{d\tilde{c}_m}{dt}(0)\right)$$

注 この定義の右辺は chart (U, φ) のとり方によらない

第1の定義

$$T_pM = \{p\text{ を通る } C^\infty\text{ 級曲線}\} / \sim$$

- ベクトル空間の構造は明らかではない
- (U, φ) をとると $\mathbb{R}^m$ と同一視される

第2の定義 「c に沿った微分作用素」を考える

$f \quad U \longrightarrow \mathbb{R}$ 　 C^{∞}級関数

pを含む chart

$$f \circ c : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\left.\frac{d}{dt} f \circ c(t)\right|_{t=0}$$ を考える