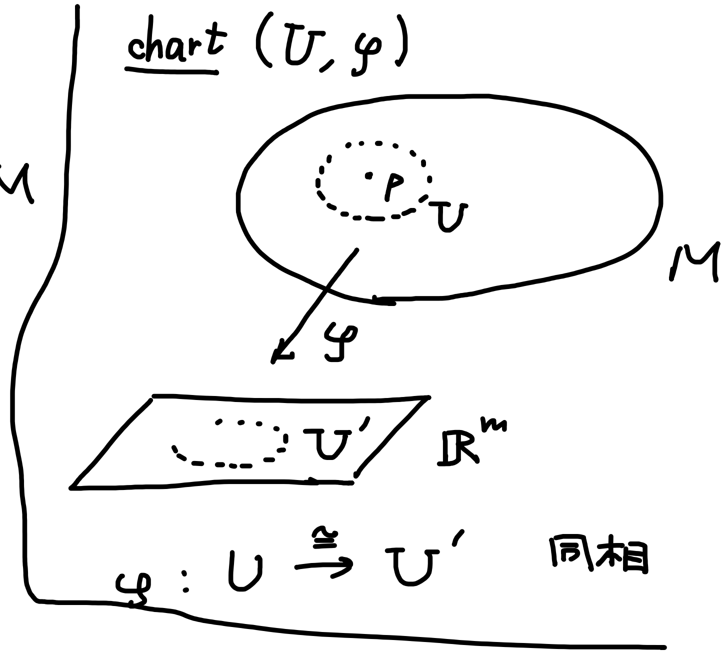


位相多様体 : 各点で座標近傍がとれるような位相空間 M
(chart)

C^∞級多様体の定義

Recall ・ $\mathbb{R}^m$ の open set 上で定義された関数 $f(x_1, \dots, x_m)$
が C^∞級

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ f の任意階の偏導関数 $\dfrac{\partial^{k_1+\cdots+k_m} f}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_m^{k_m}}(x_1, \dots, x_m)$
が存在して連続

・$\mathbb{R}^n$値関数 $f(x_1, \dots, x_m) = (f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m))$ が C^∞級

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall i$ に対して $f_i(x_1, \dots, x_m)$ が C^∞級

定義 位相空間MとMのm次元座標近傍の族 $\mathcal{S} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ が次の条件を満たすとき

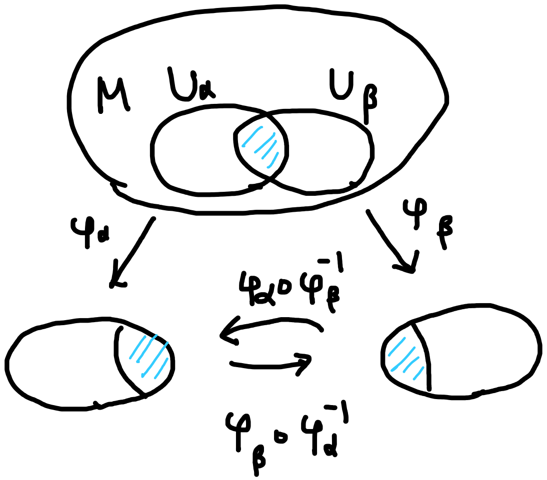
組 $(M, \mathcal{S})$ をm次元C^∞級多様体という.

(1) Mはハウスドルフ

(2)
$$\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = M$$

(3) $\alpha,\beta\in A$, $U_\alpha\cap U_\beta \neq \phi$ ならば座標変換

$$\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1} : \underset{\underset{\mathbb{R}^m}{\cap}\ \text{open}}{\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)} \xrightarrow{\cong} \underset{\underset{\mathbb{R}^m}{\cap}\ \text{open}}{\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)} \quad \text{は}\ C^\infty\text{級}$$



注 ・(1), (2) ⇒ Mはm次元位相多様体

・$\mathcal{S}$を座標近傍系（アトラス）と呼ぶ

（$\mathcal{S}$は省略することが多い）

(3)について： $\alpha=\beta$のとき $\varphi_\alpha\circ\varphi_\alpha^{-1} = id$（恒等写像）より C^∞級

$\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$ と $\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}$ は 互いに逆写像で (3)から共に C^∞級

↳ このようなものをC^∞級同相写像という

前回演習6　S^2にC^∞級多様体の構造を立体射影で入れた

これとは少し違う方法で，C^∞級多様体の構造を入れたい

$$S^m = \{ (x_1, \cdots, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{m+1}^2 = 1 \} \subset \mathbb{R}^{m+1}$$

- $\mathbb{R}^{m+1}$ の相対位相を入れる
- Hausdorff 位相空間になる（前回演習問題２，３）
- 局所座標近傍 (chart)

$$U_i^+ = \{ (x_1, \cdots, x_{m+1}) \in S^m \mid x_i > 0 \}$$

$$U_i^- = \{ (x_1, \cdots, x_{m+1}) \in S^m \mid x_i < 0 \}$$

$$U_i^+ = S^m \cap \underbrace{\{ (x_1, \cdots, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid x_i > 0 \}}_{\mathbb{R}^{m+1} \text{の open}}$$ は open set

$$\varphi_i^+ : U_i^+ \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\varphi_i^+(x_1, \cdots, x_{m+1}) = (x_1, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_{m+1})$$

$\hat{x}_i$ は x_i を除く意.

$$\varphi_i^- : U_i^- \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\varphi_i^-(x_1, \cdots, x_{m+1}) = (x_1, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_{m+1})$$

φ^+ の像 は $\varphi^+(U^+) = \{ (y_1, \cdots, y_m) \in \mathbb{R}^m \mid y_1^2 + \cdots + y_m^2 < 1 \} = B_1(0)$ ← $\mathbb{R}^m$ の open

で $\varphi_i^+ : U_i^+ \xrightarrow{\cong} B_1(0)$ ← これは同相である（演習）

• 座標変換 $\varphi_i^\pm \circ (\varphi_j^\pm)^{-1}$ は C^∞級になる（演習） $\rightsquigarrow$ S^m のアトラス

積多様体
$$\begin{cases} M^m : m\text{次元 } C^\infty\text{級多様体} \\ N^n : n\text{次元 } C^\infty\text{級多様体} \end{cases}$$
(上の添え字 m, n は次元を表す．)

$\rightsquigarrow$ $M \times N$ は $m+n$ 次元 C^∞級多様体

(1) $M \times N$ には積位相を入れる

$\{U \times V \mid U \underset{\text{open}}{\subset} M,\ V \underset{\text{open}}{\subset} N\}$ を開基とする位相
open basis

M, N : Hausdorff $\Rightarrow$ $M \times N$ も Hausdorff

(2) Mのアトラス $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$
Nのアトラス $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$
に対して $M \times N$ のアトラスを
$\{(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)\}$ とおく

$$\varphi_\alpha\times\psi_\beta : \underset{\substack{\cap\ \text{open} \\ M\times N}}{U_\alpha\times V_\beta} \xrightarrow{\cong} \underset{\substack{\cap\ \text{open} \\ \mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n}}{\varphi_\alpha(U_\alpha)\times\psi_\beta(V_\beta)}$$ は 同相

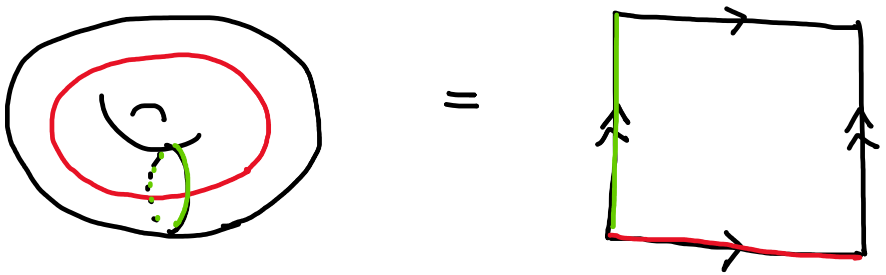
$$(\varphi_\alpha\times\psi_\beta)(x,y) = (\varphi_\alpha(x), \psi_\beta(y))$$ (座標変換 C^∞級を check)

例 トーラス

$S^1 = \{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1 \}$ C^∞級多様体

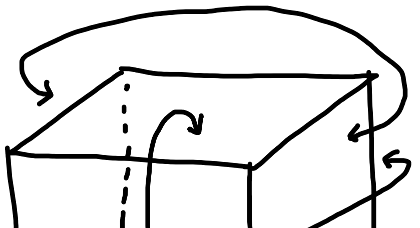
$T^m = \underbrace{S^1\times\cdots\times S^1}_{m個}$ C^∞級多様体になる (m次元トーラス)

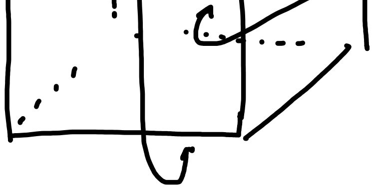
T^2



正方形の対辺を同一視して得られる位相空間

T^3





対面を同一視

開部分多様体 M : C^∞級多様体 $U \subset M$: open set

$\rightsquigarrow$ Uは自然にC^∞級多様体の構造を持つ

$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$: Mのアトラス $\rightsquigarrow$ $\{(U_\alpha \cap U, \varphi_\alpha|_{U \cap U_\alpha})\}$ は Uのアトラスを定める

リーマン球面 $\mathbb{C}$の1点コンパクト化 $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

復習：X：位相空間，Xの一点コンパクト化とは $X^* = X \cup \{\infty\}$ に次の位相を入れたもの

$U \subset X^*$ が open $\Longleftrightarrow$ ① $U \not\ni \infty$ かつ U は X の open
又は
② $U \ni \infty$ かつ $X \setminus U$ はコンパクト閉集合

・X^* はコンパクト位相空間

・ X が局所コンパクト，ハウスドルフ $\Rightarrow$ X^* もハウスドルフ

$\hat{\mathbb{C}}$ に C^∞ 級多様体の構造を入れる　chart として次をとる

・ $U_1 = \mathbb{C} \subset \hat{\mathbb{C}}$

・ $U_2 = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} = (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \sqcup \{\infty\}$ ← open (∵ $\{0\}$ がコンパクト閉)

・ $\varphi_1 : U_1 \longrightarrow \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$　　$\varphi_1 = id$

・ $\varphi_2 : U_2 \longrightarrow \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$　　$\varphi_2(z) = \begin{cases} 1/z & z \neq \infty \text{ のとき} \\ 0 & z = \infty \text{ のとき} \end{cases}$

↑ 同相になる

<u>座標変換</u>

$$U_1 \cap U_2 = \mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{C}^\times$$

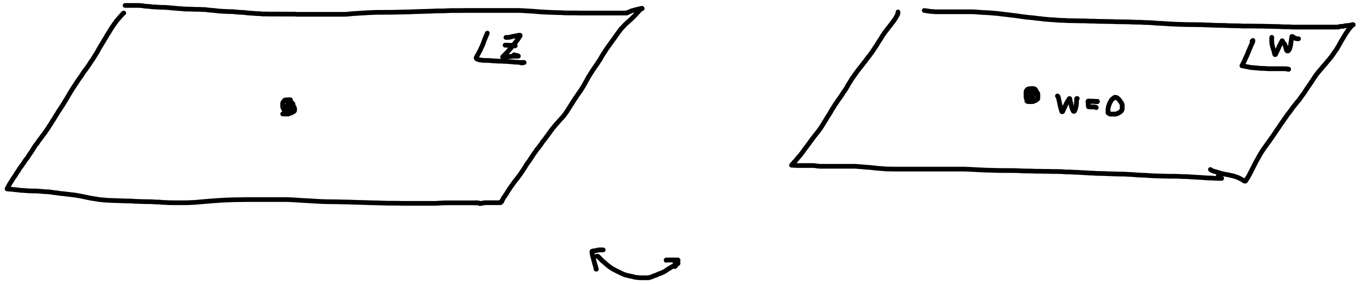
$$\begin{tikzcd}
 & U_1 \cap U_2 \arrow[dl, "\varphi_1 = id"'] \arrow[dr, "\varphi_2"] & \\
\mathbb{C}_z \supset \mathbb{C}^\times \arrow[rr, bend right] & & \mathbb{C}^\times \subset \mathbb{C}_w
\end{tikzcd}$$

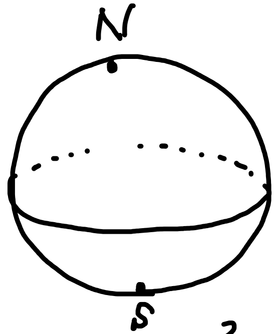
$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(z) = 1/z$　は C^∞ 級 map

実座標でかくと　$z = x + iy$

$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$$





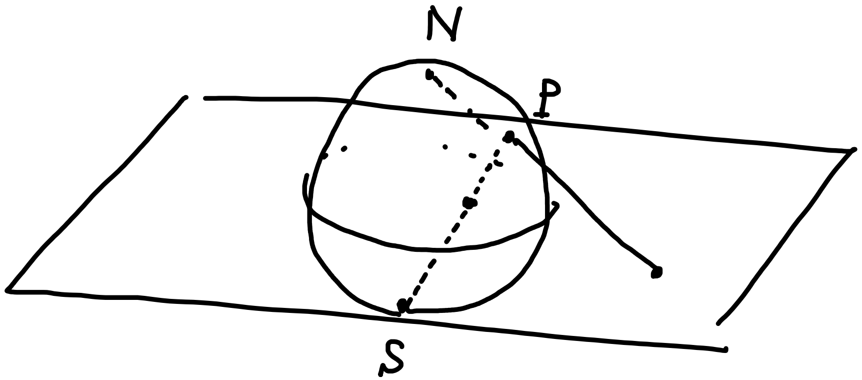
原点以外を $w = 1/z$ で はり合わせる

位相的には S^2 と同相

注: 立体射影によるs^2の座標系との関係

$$\begin{tikzcd}
 & S^2 \setminus \{N, S\} \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\
\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \arrow[rr] & & \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}
\end{tikzcd}$$

$$(x, y) \longmapsto \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$$



$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$$

φ を φ_1 に対応するものと思うと　ψ と 複素共役　$(x, y) \longmapsto (x, -y)$ を合成したもの

が φ_2 に対応する　　$\varphi_2 = \underline{\quad} \circ \psi$

極大アトラス

$\mathcal{S}$: C^∞級 $\underbrace{\text{多様体}}_{}$ のアトラス
（多様体 $= M$）

どのような座標近傍(chart)を許してよいか？

(V, ψ) : M の chart　　$V \underset{\text{open}}{\subset} M$　　$\psi : V \xrightarrow{\cong} V' \underset{\text{open}}{\subseteq} \mathbb{R}^m$

定義： chart (V, ψ) が アトラス $\mathcal{S}$ に関して C^∞級

$\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^\forall (U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{S}$ に対して 座標変換 $\psi \circ \varphi_\alpha^{-1}$, $\varphi_\alpha \circ \psi^{-1}$ が C^∞級

$$
\begin{tikzcd}
 & U_\alpha \cap V \arrow[dl, "\varphi_\alpha"', "\cong"] \arrow[dr, "\psi"] & \\
\varphi_\alpha(U_\alpha \cap V) \arrow[rr, shift left, "\psi \circ \varphi_\alpha^{-1}"] & & \psi(U_\alpha \cap V) \arrow[ll, shift left, "\varphi_\alpha \circ \psi^{-1}"]
\end{tikzcd}
$$

$\varphi_\alpha(U_\alpha \cap V) \underset{\text{open}}{\subseteq} \mathbb{R}^m$　　$\psi(U_\alpha \cap V) \underset{\text{open}}{\subseteq} \mathbb{R}^m$

定義 $\mathcal{M}(\mathcal{S}) = \{ (V, \psi) : M$ の chart $\mid (V, \psi)$ は $\mathcal{S}$ に関して C^∞ 級 $\}$

を極大アトラスという．

注：(1) $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ はアトラスである．（つまり 座標変換はC^∞級）

(2) $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}(\mathcal{S})$ （これは定義からわかる）

(3) $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ は $\mathcal{S}$ を含むアトラスのなかで包含関係について最大

位相多様体 M 上の C^∞ 級アトラス $\mathcal{S}, \mathcal{T}$ が同値

$$\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \quad \mathcal{M}(\mathcal{S}) = \mathcal{M}(\mathcal{T})$$

$\Longleftrightarrow$ $\mathcal{S} \cup \mathcal{T}$ がアトラスになる

（座標変換が C^∞ 級）

このとき

C^∞ 級多様体 $(M, \mathcal{S})$ と $(M, \mathcal{T})$ は「同じ」と考える．

*今後は最初に与えられたアトラス $\mathcal{S}$ にはこだわらず，任意の $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ に属するchartを自由に考える

例

S^2 のアトラス 1 ： $S^2 \setminus \{N\}$, $S^2 \setminus \{S\}$ に立体射影で座標

アトラス 2 : $\{(U_i^{\pm}, \varphi_i^{\pm})\}_{i=1,2,3}$

実は同値である