12回目

2020年7月15日　10:18

微分形式と反対称形式

ベクトル場 : 各点 $p \in M$ に対して $X_p \in T_pM$

微分形式 : $p \in M \mapsto \omega_p \in \Lambda^k T_p^*M$

多重ベクトル場 $p \in M \mapsto v_p \in \Lambda^k T_pM$

テンソル場 $T_p \in (T_pM)^{\otimes n} \otimes (T_p^*M)^{\otimes m}$

実は ω_p は 反対称形式（交代形式）

$$\underbrace{T_pM \times \cdots \times T_pM}_{k\text{コ}} \longrightarrow \mathbb{R}$$ と思える

[松本]での def

$$(v_1, \dots, v_k) \longmapsto \omega_p(v_1, \dots, v_k)$$

① 各 v_i について線形（多重線形性）

② 反対称 $\omega_p(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\, \omega_p(v_1, \dots, v_k)$

$\forall \sigma \in S_k$: k次対称群

<u>定理</u>　V　$\mathbb{R}$上の有限次元ベクトル空間

同型 $\exists!$ Φ : $\bigwedge^k V^* \xrightarrow{\cong} \left\{ f : \overbrace{V \times \cdots \times V}^{k\text{コ}} \to \mathbb{R} \ \text{反対称形式} \right\}$

s.t.　$\varphi_1, \cdots, \varphi_k \in V^*$ に対して

$$\underbrace{\Phi(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k)}(v_1, \cdots, v_k) = \det\left(\underbrace{\left(\varphi_i(v_j)\right)_{i,j}}_{k\text{次正方行列}} \right)$$

↑
$v_1, \cdots, v_k$ について
多重線形・反対称

- $k=1$ のときは明らか.　$\bigwedge^1 V^* = V^*$

Universal …（… 明 …）

これが

・universal mapping property (演習 No 11, 問題 125)

$$\begin{tikzcd}
\underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{k\text{個}} \arrow[r] \arrow[d] & \{V^k\text{上の反対称形式}\} \\
\Lambda^k V^* \arrow[ur, dashed, "\exists!\,\Phi"'] &
\end{tikzcd}$$

$$(\varphi_1, \ldots, \varphi_k) \longmapsto \det\left((\varphi_i(v_j))_{i,j} \right)$$

$$\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k \in \Lambda^k V^*$$

多重線形かつ反対称をcheck

・同型になること(演習)

・$e_1, \ldots, e_n$: Vの基底

$e_1^*, \ldots, e_n^*$ V^*の双対基底

$\Phi(e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^*)$ が反対称形式の空間の基底になることをcheck.

㊟ 文献によっては $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k \longmapsto \frac{1}{k!} \det\left((\varphi_i(v_j))_{i,j} \right)$

によって同型を与えるものもある

引き戻し，外積，外微分　（再論）

以下では　$\omega_p \in \bigwedge^k T_p^* M$　を　T_pM 上の k次 反対称形式

と（Φ により）同一視することにする．

例．ω：2-form　X, Y：vector 場

$$\omega_p(X_p, Y_p) \quad \left(= \Phi(\omega_p)(X_p, Y_p) \right)$$

$\omega(X, Y)$　は　関数になる

・α, β　1-form，　X, Y　vector 場

$$(\alpha_p \wedge \beta_p)(X_p, Y_p) = \alpha(X)\beta(Y) - \alpha(Y)\beta(X)$$

定理　$\varphi : M \to N$　C^∞ map　　ω　N 上の k-form

$$(\varphi^*\omega)_p(v_1,\dots,v_k) = \omega_{\varphi(p)}(\underbrace{d_p\varphi(v_1)}_{\in T_{\varphi(p)}N},\dots,\underbrace{d_p\varphi(v_k)})$$

$$v_1,\dots,v_k \in T_pM$$

∵

$$d_p\varphi : T_pM \longrightarrow T_{\varphi(p)}N$$

$$\rightsquigarrow (d_p\varphi)^* \quad T^*_{\varphi(p)}N \longrightarrow T^*_pM$$

$$\rightsquigarrow (d_p\varphi)^* \quad \Lambda^k T^*_{\varphi(p)}N \longrightarrow \Lambda^k T^*_pM$$

$$\overset{\in}{\omega_{\varphi(p)}} \longmapsto \overset{\in}{(\varphi^*\omega)_p}$$ と定義された

$\omega_{\varphi(p)} = \alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_k$ の形のときに示せば十分 $(\alpha_i \in T^*_{\varphi(p)}N)$

$$(\varphi^*\omega)_p = (d_p\varphi)^*(\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_k)$$

$$= (d_p\varphi)^* \alpha_1 \wedge (d_p\varphi)^* \alpha_2 \wedge \cdot \quad \wedge (d_p\varphi)^* \alpha_k$$

$$(\varphi^*\omega)_p (v_1, \dots, v_k) = \det \left(((d_p\varphi)^*\alpha_i)(v_j) \right)$$

$$= \det \left(\alpha_i (d_p\varphi(v_j)) \right)$$

$$= \underbrace{(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k)}_{\omega} (d_p\varphi(v_1), \dots, d_p\varphi(v_k))$$

//

定理 $\omega \in \Lambda^k T_p^* M$, $\eta \in \Lambda^l T_p^* M$, $v_1, \dots, v_{k+l} \in T_p M$

$$(\omega \wedge \eta)(v_1, \dots, v_{k+l}) = \frac{1}{k!\, l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \mathrm{sgn}(\sigma)\, \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \times \eta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)})$$

(演習)

$$\omega = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k$$
$$\eta = \eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_l$$

の場合に示せばよい $\begin{cases} \omega_i \in T_p^*M \\ \eta_j \in T_p^*M \end{cases}$

<u>定理</u>

M : C^∞ mfd

$\omega \in \Omega^k(M) = \{ C^\infty$級 k-form on $M \}$

$X_1, \cdots, X_{k+1} \in \mathfrak{X}(M) = \{ C^\infty$級 ベクトル場 on $M \}$

$$d\omega(X_1, \cdots, X_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} X_i \left(\omega(X_1, \cdots, \underline{\check{X}_i}, \cdots, X_{k+1}) \right)$$
$$+ \sum_{1 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j} \omega\left([X_i, X_j], X_1, \cdots, \check{X}_i, \cdots, \check{X}_j, \cdots, X_{k+1} \right)$$

(check $\vee$ は除く意)

(演習)

$\mathfrak{X}(M)$

[cf. Lie環のコホモロジー　　$\mathfrak{g}$: Lie環
$C^\infty(M) = V$: $\mathfrak{g}$の表現
$\rightsquigarrow H^i(\mathfrak{g}; V)$]

例

f　0-form（関数）

$$df(X) = X(f)$$

α　1-form

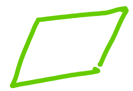
$$d\alpha(X, Y) = X\alpha(Y) - Y\alpha(X) - \alpha([X, Y])$$

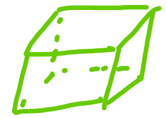
ω: 2-form

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y, Z) = {} & X\omega(Y, Z) - Y\omega(X, Z) + Z\omega(X, Y) \\ & - \omega([X, Y], Z) + \omega([X, Z], Y) \\ & - \omega([Y, Z], X) \end{aligned}$$

($+\, Y\omega(Z, X)$)

- 内部積
- Lie微分（Cartanの公式）…自習

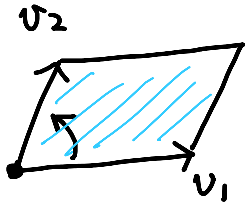




微分形式の積分

$\omega_p \in \Lambda^k T_p^* M$ … 向き付けられた「微小平行$(2k)$面体」に対して実数を対応させる

$\omega_p \in \Lambda^2 T_p^* M$



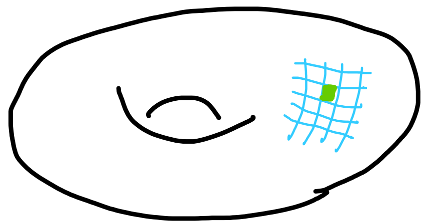
$\subset T_pM$

$\longmapsto \omega(v_1, v_2)$

$= -\omega(v_2, v_1)$

• 向きの決まった k次元部分多様体 $S \subset M$ に対して

積分 $\int_S \omega$ を定義したい



・ 積分の変数変換の公式

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = \int_{\mathbb{R}^2} f(x_1(y_1, y_2), x_2(y_1, y_2)) \left| \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} \right| dy_1\, dy_2$$

↑
絶対値がついているのがちがう

$$dx_1 \wedge dx_2 = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)}\, dy_1 \wedge dy_2$$

微分形式の積分には「向き」（"座標の順序"）が必要

$$\underbrace{f(x_1, x_2)\, dx_1 \wedge dx_2} = \underbrace{-f(x_1, x_2)\, dx_2 \wedge dx_1}$$

順序をきめてはじめて積分ができる.

注 微積で学ぶ積分は 微分形式ではなく「density」の積分

$$f(x_1, x_2)\, |dx_1 \wedge dx_2|$$

微分形式 + 向き $\longrightarrow$ density

<u>向き</u>　V 実ベクトル空間　$n = \dim V$

V の順序付けられた基底全体の集合に次の同値関係を入れる

$$(v_1, \dots, v_n) \sim (w_1, \dots, w_n) \iff w_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i \text{ とおくとき } \det((a_{ij})) > 0$$

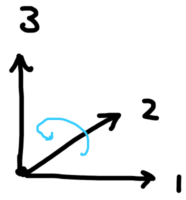
この同値類を V の<u>向き</u>という.

<u>記号</u>　$\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ で 基底 $(v_1, \dots, v_n)$ の定める向きを表す.

- V の向きはちょうど 2つある

$\mathbb{R}^2$ の向き $\begin{cases} \langle e_1, e_2 \rangle \\ \langle e_2, e_1 \rangle \end{cases}$

$\mathbb{R}^3$ の向き $\begin{cases} \langle e_1, e_2, e_3 \rangle & \text{右手系} \\ \langle e_2, e_1, e_3 \rangle & \text{左手系} \end{cases}$



- 0次元ベクトル空間の向き : $\overset{\langle \phi \rangle}{\overset{\shortparallel}{1}}$ 又は -1

  上の定義では1つしか向きがない（ϕ の与える向き）

  が形式的にそれとは逆の向き(-1)をつけ加える

- V の向きを選ぶとき

  その向きに属する基底を正の（向きをもつ）基底といい

  その向きに属さない基底を負の（〃）基底という

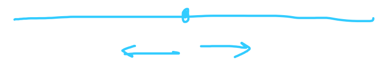
向きは $\{V$の順序付けられた基底$\} \longrightarrow \{\pm 1\}$ なる map と

思える

選んだ向きを 正の向き

他方の向きを 負の向き，(−1)倍した向き などと言う。

注 V の向き $\underset{1:1}{\longleftrightarrow}$ $\bigwedge^n V$ の向き 1次元ベクトル空間



$\langle v_1, \cdots, v_n \rangle \longmapsto \langle v_1 \wedge \cdots \wedge v_n \rangle$

注 V の向き $\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ V^* の向き

$\langle v_1, \cdots, v_n \rangle \longmapsto \langle v_1^*, \cdots, v_n^* \rangle$

$\{v_i^*\}$ は $\{v_i\}$ の双対基底

$v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$

多様体の向き

M の向き とは 各点 $p \in M$ に対して T_pM の向きが定められたもので

次の条件を満たす。

- $\forall p \in M$ に対して pを含む座標近傍 $(U;\ x_1, \dots, x_m)$ が存在して
- $\forall q \in U$ に対して T_qM の向きは $\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_q, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_q \right\rangle$
- で与えられる

向きが点pを動かすとき連続に変化する

・Mに向きが与えられたとき、上の条件をみたす座標 $(x_1, \dots, x_m)$ を

<u>正の座標系</u> という。

・$\left.\begin{array}{l}(U;\ x_1, \dots, x_m) \\ (V;\ y_1, \dots, y_m)\end{array}\right\}$ 正の座標 $\Rightarrow \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_q, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_q \right\rangle$

$$= \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_q, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y_m}\right)_q \right\rangle$$

$\forall q \in U \cap V$

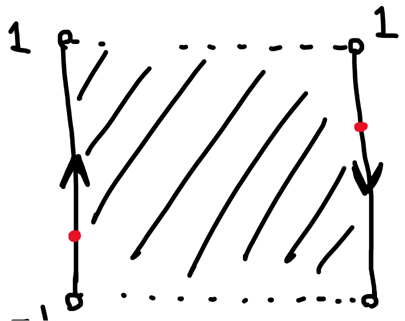
$$\Rightarrow \quad \frac{\partial(x_1,\dots,x_m)}{\partial(y_1,\dots,y_m)} > 0 \quad \text{on } U\cap V$$

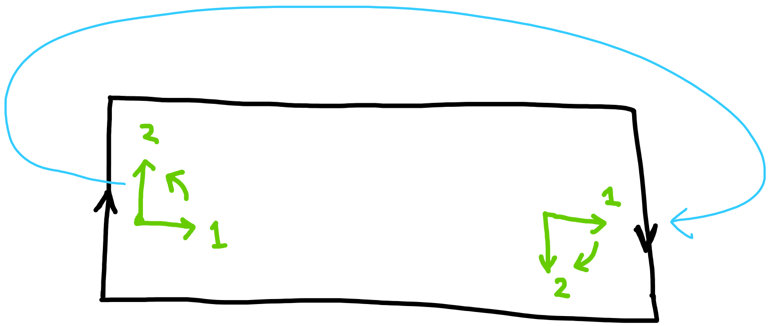
- Mが向き付け可能 $\overset{}{\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}}$ Mに向きが存在する

- Mが連結かつ向き付け可能 $\Rightarrow$ M上の向きはちょうど2つある（演習）

(例) 向き付け可能でない多様体

$$M = [0,1]\times(-1,1) \Big/ {(0,x)\sim(1,-x)}$$



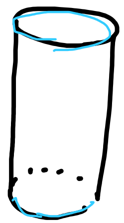


Möbiusの帯

例

- S^n は 向き付け可能
- $\mathbb{C}P^n$ は 〃

- $\mathbb{R}P^2$ は 向き付け不可能
- Kleinのつぼ



は向き付け 不可

積分

M: 向き付けられた m次元 C^∞ mfd, 第2可算公理をみたす.

$\omega \in \Omega^m(M)$

$$\mathrm{Supp}\,\omega = \overline{\{ p \in M \mid \omega_p \neq 0 \}} \quad \cdot \quad \omega の台$$

$\mathrm{Supp}\,\omega$ がコンパクトと仮定　$\int_M \omega$ を定義する.

① $\mathrm{Supp}\,\omega$ がある正の座標近傍 $(U; x_1, \cdots, x_m)$ に含まれる場合

$$M \supset U \xrightarrow[(x_1,\cdots,x_m)]{\cong} U' \subset \mathbb{R}^m$$

$\omega = f(x_1, \cdots, x_m)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$ とかける

f はコンパクト台の C^∞ 級　$f \in C_c^\infty(U')$

$$\int_M \omega := \int_{U'} f(x_1, \cdots, x_m)\, dx_1 dx_2 \cdots dx_m$$

積分の変数変換公式から，これは $\mathrm{Supp}\,\omega$ を含む正の座標系

のとり方によらない

② 一般の場合　　$M = \bigcup_\alpha U_\alpha$

$(U_\alpha ; x_1^\alpha, \ldots, x_m^\alpha)$ 正の座標系

$\rightsquigarrow$ 1の分割 $\rho_\alpha : M \xrightarrow[C^\infty 級]{} \mathbb{R}$

$$\left[\begin{array}{l} \cdot\ \mathrm{Supp}\,\rho_\alpha \subset U_\alpha \\ \ \ \sum_\alpha \rho_\alpha = 1 \\ \cdot\ \mathrm{Supp}\,\rho_\alpha \text{ は局所有限} \\ \cdot\ 0 \leq \rho_\alpha \leq 1 \end{array}\right.$$

$$\int_M \omega := \sum_\alpha \underbrace{\int_M \rho_\alpha \omega}$$

← 台が U_α に含まれているので ① より定義されている

↑ 実は有限和

$\mathrm{Supp}\,\rho_\alpha \cap \mathrm{Supp}\,\omega \neq \phi$ なる α は高々有限

$\because$ $\mathrm{Supp}\,\rho_\alpha$ は $\underbrace{\mathrm{Supp}\,\omega}_{\text{コンパクト}}$ の locally finite covering （演習）

- $\{U_\alpha\}$, $\{\rho_\alpha\}$ の取り方によらないこと

$\{V_\beta\}$, $\{\tau_\beta\}$: 別の choice

$\mathrm{Supp}\,\rho_\alpha\omega \cap \mathrm{Supp}\,\tau_\beta \neq \phi$ なる β は有限

$$\sum_\alpha \int_M \rho_\alpha \omega = \sum_\alpha \int_M \Big(\sum_\beta \tau_\beta\Big) \rho_\alpha \omega$$

$$= \underbrace{\sum_\alpha \sum_\beta}_{\text{和は有限}} \int_M \underbrace{\tau_\beta \rho_\alpha \omega}_{U_\alpha \cap V_\beta}$$

$$= \sum_\beta \int_M \zeta_\beta \omega \quad //$$

(例)

$\omega \in \Omega^k(M)$

$S \subset M$ k次元部分多様体、向き付けられている

$\underline{\mathrm{Supp}\,\omega \cap S}$ がコンパクトとする

$\Updownarrow$

$\mathrm{Supp}\, i^*\omega$ がコンパクト

$$\int_S \omega := \int_S i^*\omega$$ と定める

但し $i: S \hookrightarrow M$ は包含写像