11回目

2020年7月8日　10:18

微分形式・引き戻し・外積・外微分

復習

- 1-form α

$p \in M$ に対して 余接ベクトル $\alpha_p \in T_p^* M$ が定まる

- 局所座標表示

$$\alpha_p = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(x_1, \cdots, x_m) (dx_i)_p$$

$$\{(dx_i)_p\} \overset{\text{双対}}{\longleftrightarrow} \left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right\}$$

$T_p^* M$ の basis　　　$T_p M$ の basis

- f 点pのまわりの C^∞ 級

$$(df)_p(X) := X(f)$$

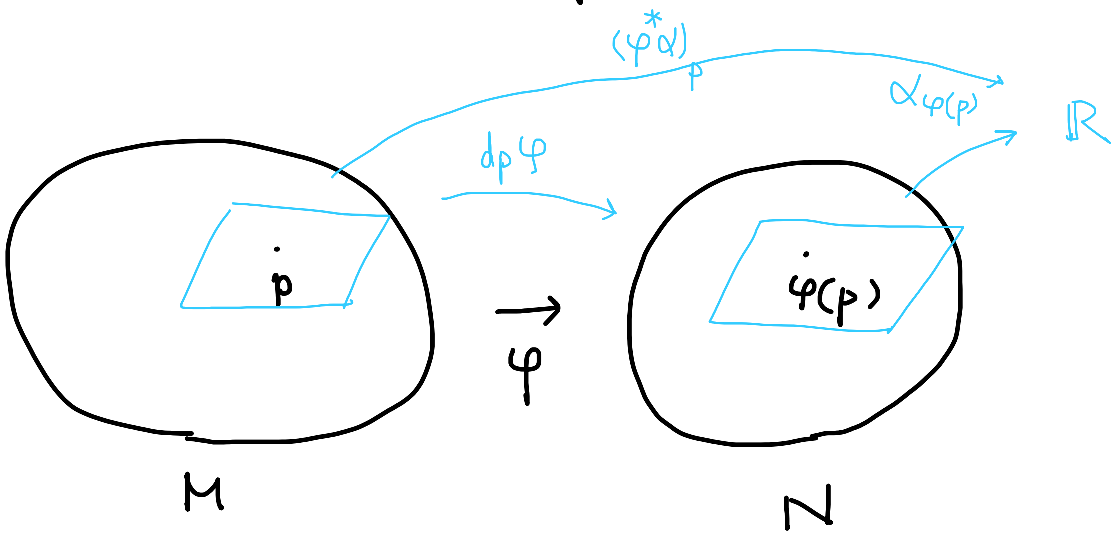
$X \in T_p M$

引き戻し

$\varphi : M \longrightarrow N$　C^∞ map

N 上の 1-form α に対して M 上の 1-form $\varphi^* \alpha$ を次で定義

$$(\varphi^*\alpha)_p := \alpha_{\varphi(p)} \circ d_p\varphi \qquad (\forall p \in M)$$



・$\varphi^*\alpha$ を α の φ による引き戻し (pull-back) という

局所座標表示.

$(x_1, \dots, x_m)$ p のまわりの座標.

$(y_1, \dots, y_n)$ $\varphi(p)$ 〃 座標.

$y_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_m)$: φ の座標表示.

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(y_1, \dots, y_n)\, dy_i \quad : \quad \alpha \text{ の 〃}$$

$$(\varphi^*\alpha)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right) = \alpha_{\varphi(p)}\left(d_p\varphi\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right)\right)$$

$$= \alpha_{\varphi(p)}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}(x(p))\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_{\varphi(p)}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}(x(p))\underbrace{\alpha_j(\varphi_1(x(p)),\cdots,\varphi_n(x(p)))}_{=\ \varphi^*\alpha_j := \alpha_j\circ\varphi}$$

よって $\varphi^*\alpha = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}(x)(\varphi^*\alpha_j)(x)\,dx_i$ （関数の引き戻し）

よって α C^∞ 1-form $\Rightarrow$ $\varphi^*\alpha$ も C^∞ 1-form

命題 $f: M\to N$, $g: N\to Q$ C^∞ maps

Q上の 1-form α に対して $(g\circ f)^*\alpha = f^*(g^*\alpha)$

接写像に対する chain rule $d_p(g\circ f) = d_{f(p)}g \circ d_pf$

からすぐ分かる (演習)

<u>命題</u> $\varphi : M \to N$: C^∞ map , α N上の $\overbrace{\text{1-}}^{C^\infty\text{級}}$form

f : N上の C^∞級関数

① $\varphi^*(f\cdot\alpha) = \varphi^*f \cdot \varphi^*\alpha$

関数と 1 form の積

$(f\alpha)_p := f(p)\,\alpha_p$

は 1-form

② $\varphi^*(df) = d(\varphi^*f)$

$\varphi^*f := f\circ\varphi$

① $(\varphi^*(f\alpha))_p = (f\alpha)_{\varphi(p)} \circ d_p\varphi$

$$= f(\varphi(p)) \cdot (\alpha_{\varphi(p)} \circ d_p\varphi)$$

$$= f(\varphi(p)) \cdot (\varphi^*\alpha)_p = (\varphi^*f \cdot \varphi^*\alpha)_p$$

② $(\varphi^*(df))_p = d_{\varphi(p)}f \circ d_p\varphi$ （定義より）

$= d_p(f\circ\varphi)$ (chain rule)

$= d_p(\varphi^*f) = (d(\varphi^*f))_p$ //

外積代数 （グラスマン代数）

exterior algebra / Grassmann algebra

V : 有限次元ベクトル空間 / $\mathbb{R}$

$$\Lambda^\bullet V = \bigoplus_{k=0}^{\dim V} \Lambda^k V$$

外積代数

$\left(\Lambda^0 V := \mathbb{R} \right.$ とおく $\left. \right)$

V の basis $e_1, \cdots, e_n$ を fix する

wedge

$$\Lambda^k V := \bigoplus_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} \mathbb{R}\, \boxed{e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}}$$

記号

こういう記号を基底とするベクトル空間

$\uparrow$

$i_1, i_2, \cdots, i_k$ は単調増大な添え字の列全てをわたる

$$\dim \Lambda^k V = \binom{n}{k}$$

一般に $v_1, \cdots, v_k \in V$ に対して $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k \in \Lambda^k V$

が次のルールで定まる

① (多重線形性) $v_i = a\vec{x} + b\cdot\vec{y}$ $\qquad \vec{x}, \vec{y} \in V$

aとき　　　　　　　$a\ b \in \mathbb{R}$

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_i \wedge \cdots \wedge v_k = a \cdot (v_1 \wedge \cdots \wedge \vec{x} \wedge \cdots \wedge v_k) + b\,(v_1 \wedge \cdots \wedge \vec{y} \wedge \cdots \wedge v_k)$$

② (反対称性)

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_i \wedge v_{i+1} \wedge \cdots \wedge v_k = -\,v_1 \wedge \cdots \wedge v_{i+1} \wedge v_i \wedge \cdots \wedge v_k$$

例

$e_1 \wedge e_1 = -e_1 \wedge e_1$　より　$e_1 \wedge e_1 = 0$

$$e_1 \wedge (e_1+e_2) \wedge (e_1+e_2+e_3) = e_1 \wedge e_2 \wedge (e_1+e_2+e_3)$$

$$= e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$$

$$e_2 \wedge e_1 \wedge e_3 = -\,e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$$

wedge 積　(外積)

$$\bigwedge^k V \times \bigwedge^l V \longrightarrow \bigwedge^{k+l} V$$

$\mathbb{R}$上双線形な積で

$$\underbrace{(v_1\wedge\cdots\wedge v_k)}_{\bigwedge^k V}\wedge\underbrace{(w_1\wedge\cdots\wedge w_l)}_{\bigwedge^l V} = \underbrace{v_1\wedge\cdots\wedge v_k\wedge w_1\wedge\cdots\wedge w_l}_{\bigwedge^{k+l} V}$$

を満たすものが唯1つ存在する。（基底で定義して双線形に拡張）

例　$\bigwedge^k V$ の元が常に $v_1\wedge\cdots\wedge v_k$ の形に書けるわけではない

$$\bigwedge^2 \mathbb{R}^4 \ni e_1\wedge e_2 + e_3\wedge e_4 =: x$$

2次の元

$x = v\wedge w$ の形には書けない

もし書けたとき　$x\wedge x = (v\wedge w)\wedge(v\wedge w) = 0$

ため $\quad x \wedge x = 2\, e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \neq 0$ と矛盾.

命題 $\quad \alpha \in \Lambda^k V,\ \beta \in \Lambda^l V,\ \gamma \in \Lambda^m V$ に対して

$$\begin{cases} ① & (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \\ ② & \alpha \wedge \beta = (-1)^{k \cdot l}\, \beta \wedge \alpha \end{cases}$$

: 超可換
次数付き可換

(super commutative
graded 〃

注 $\quad \dim \Lambda^{\bullet} V = 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$

$$= 2^n$$

単に k-form とも

定義 $\quad$ k次微分形式 (differential k-form) とは Mの各点 p

で $\omega_p \in \Lambda^k(T_p^*M)$ が与えられたもの

局所座標表示 $(x_1, \dots, x_m)$ 座標

$$\omega_p = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} \underbrace{\omega_{i_1, i_2 \cdots, i_k}(x_1(p), \dots, x_m(p))}_{\text{関数}} (dx_{i_1})_p \wedge \cdots \wedge (dx_{i_k})_p$$

- 各係数 $\omega_{i_1, \cdots, i_k}(x_1, \dots, x_m)$ が C^∞ 級のとき ω を

<u>C^∞ 級 k-form</u> という

- 座標変換 $dx_i = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial y_j} dy_j$

$$dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} = \sum \frac{\partial(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})}{} dy_{j_1} \wedge \cdots \wedge dy_{j_k}$$

$$\sum_{j_1<\cdots<j_k} \underbrace{\frac{\partial(\ \cdots\ )}{\partial(y_{j_1},\ldots,y_{j_k})}}_{C^\infty級}$$

⇝ C^∞級の定義は座標によらない

外積

α : k-form, β : l-form

$$(\alpha\wedge\beta)_p := \alpha_p \wedge \beta_p$$ により $(k+l)$-form $\alpha\wedge\beta$

が定まる.

[α, β : C^∞級 $\Longrightarrow$ $\alpha\wedge\beta$ C^∞級]

引き戻し

$\varphi : M \longrightarrow N$ C^∞ map

$p\in M$ $\quad d_p\varphi : T_pM \to T_{\varphi(p)}N$

の双対より $(d_p\varphi)^* : T^*_{\varphi(p)}N \longrightarrow T^*_pM$

$\alpha \longmapsto \alpha\circ d_p\varphi$

⇝ k次外積の間の線形写像

$$(d_p\varphi)^* : \Lambda^k T^*_{\varphi(p)}N \to \Lambda^k T^*_pM$$

(注) 一般に線形写像 $f : V \to W$ に対して線形写像

$f : \Lambda^k V \to \Lambda^k W$ であって

$v_1\wedge\cdots\wedge v_k \longmapsto f(v_1)\wedge\cdots\wedge f(v_k)$ なるものが $\exists!$ 存在する

α : N 上の k-form に対して M 上の k-form $\varphi^*\alpha$ を

$$(\varphi^*\alpha)_p := (d_p\varphi)^*(\alpha_{\varphi(p)})$$

と定める.

α C^∞級 $\Rightarrow$ $\varphi^*\alpha$ も C^∞級

命題　α, β $\underbrace{\text{微分形式}}_{N\text{上の}}$　$\varphi: M \to N$ C^∞ map

$$\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = \varphi^*\alpha \wedge \varphi^*\beta$$

∵ $p \in M$ に対して

$$\begin{aligned}(\varphi^*(\alpha\wedge\beta))_p &= (d_p\varphi)^*(\alpha \wedge \beta)_{\varphi(p)} \\ &= (d_p\varphi)^*(\alpha_{\varphi(p)} \wedge \beta_{\varphi(p)}) \\ &= (d_p\varphi)^*(\alpha_{\varphi(p)}) \wedge (d_p\varphi)^*(\beta_{\varphi(p)}) \\ &= (\varphi^*\alpha)_p \wedge (\varphi^*\beta)_p \\ &= (\varphi^*\alpha \wedge \varphi^*\beta)_p \quad //\end{aligned}$$

長的外積に誘導する写像のdef

㊟ $\bigwedge^0 T_p^* M = \mathbb{R}$ だったので 0-form は単に $\mathbb{R}$値関数のこと

㊟ ・関数，微分形式は引き戻せる！　（ベクトル場は$\underbrace{\quad}_{\text{一般には}}$引き戻せない）

外微分　M : C^∞ mfd

$$\Omega^k(M) = \{ M\text{上の } C^\infty\text{級 } k\text{-form} \}$$

$$\Omega^0(M) = C^\infty(M)$$

$$\Omega^k(M) \times \Omega^l(M) \xrightarrow{\wedge} \Omega^{k+l}(M) \quad \text{外積}$$

$\mathbb{R}$上の線形写像　$d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$

て 次の性質を満たすものが唯1つ存在し, 外微分という.

① $k=0$ のとき $\Omega^0(M) \to \Omega^1(M)$, $f \longmapsto df$

は 通常の微分 (座標で書くと $df = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \cdots, x_m)\, dx_j$)

② $d \circ d = 0$

$$
\begin{tikzcd}
\Omega^k(M) \arrow[r, "d"'] \arrow[rr, bend right, "d \circ d = 0"'] & \Omega^{k+1}(M) \arrow[r, "d"'] & \Omega^{k+2}(M)
\end{tikzcd}
$$

$d(d\omega) = 0$

③ (Leibniz rule) $\alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega^l(M)$

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$$

④ (引き戻しとの整合性) $\varphi\ M \to N$ C^∞ map

$\alpha \in \Omega^k(N)$ [illegible] $d(\varphi^*\alpha) = \varphi^*(d\alpha)$

$\alpha \in \Omega^k(N)$ に対して $d(\varphi^* \alpha) = \varphi^*(d\alpha)$ 」

定理 ①〜④ を満たす写像 d が唯1つ存在する.

$\odot$ $\underline{M \text{ が } \mathbb{R}^m \text{ の open set と微分同相であるとき}}$

$(x_1, \cdots, x_m)$ を M 上の座標とする

$$k\text{-form} \quad \alpha = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} \underbrace{\alpha_{i_1, \cdots, i_k}(x)}_{0\text{-form}} \underbrace{dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}}_{k\text{-form}}$$

$d\alpha$ を上の ①〜③ のみを用いて計算

$$d\alpha \underset{\substack{\text{線形性} \\ \text{と} \\ \text{Leibniz ③}}}{=} \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \left(d \underbrace{\alpha_{i_1 \cdots i_k}(x)}_{0\text{-form}} \right) \wedge \left(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \right)$$

$$+ \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \alpha_{i_1 \cdots i_k}(x) \wedge \underline{d\left(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \right)}$$

ここで さらに Leibniz を使う

$d(dx_j) = 0$ [②より]

より ここは消える

$$\overbrace{d\alpha_{i_1 \cdots i_k}}$$

$$\underset{①より}{=} \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \sum_j \frac{\partial \alpha_{i_1 \cdots i_k}}{\partial x_j}(x)\, dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \qquad (*)$$

逆に $(*)$ で $d\alpha$ を定義することにする　このとき ①〜③ を check する

・① は 自明に成立

・② $$d(d\alpha) = \sum_{i_1, \cdots, i_k, j, l} \underbrace{\frac{\partial^2 \alpha_{i_1 \cdots i_k}}{\partial x_l \, \partial x_j}}_{j\text{と}l\text{について対称}}(x)\, \underbrace{dx_l \wedge dx_j}_{j\text{と}l\text{について反対称}} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

$$= 0$$

$I = \{i_1, \cdots, i_k\}$　$J = \{j_1, \cdots, j_l\}$

③ $\alpha = f(x)\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} = f\, dx_I$

$\beta = g(x)\, dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l} = g\, dx_J$

に対して check すれば十分

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\big(f \cdot \overset{dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}}{dx_I} \wedge g \cdot dx_J\big)$$

$$= \sum_i \frac{\partial (f \cdot g)}{\partial x_i}\, dx_i \wedge dx_I \wedge dx_J$$

$$= \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\, g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) dx_i \wedge dx_I \wedge dx_J$$

$$= \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i \wedge dx_I \right) \wedge g\, dx_J$$

$$+ \sum_i f\, dx_I \wedge g\, dx_i \wedge dx_J \quad (-1)^k$$

$$= (d\alpha)\wedge\beta + (-1)^k \alpha\wedge d\beta$$
//

dは座標のとり方によらない条件①～③で特徴付けられている

⟶ $(*)$はどの座標系でも成立する式

注 $\underset{\text{open}}{U \subset} M$ に対して，$(*)$の定義から

$$d\alpha\big|_U = d\left(\alpha\big|_U\right)$$ が成立する

一般の多様体 M での d

$M = \bigcup_i U_i$ U_i: 座標近傍

$\alpha \in \Omega^k(M)$ $\varphi_i : U_i \hookrightarrow M$ 包含写像

[①〜④を仮定に $d\alpha$ を計算]

$$\beta_i := d\alpha\big|_{U_i} = \varphi_i^*(d\alpha)$$

$$= d(\varphi_i^*\alpha) = d(\alpha|_{U_i})$$

④より

は既に知っている

β_i が M 全体での $(k+1)$-form に「はり合う」ことを見る.

$$\beta_i\big|_{U_i\cap U_j} = d(\alpha|_{U_i})\big|_{U_i\cap U_j}$$

$$\underset{\text{上の注}}{=} d(\alpha|_{U_i\cap U_j}) = d(\alpha|_{U_j})\big|_{U_i\cap U_j}$$

$$= \beta_j\big|_{U_i\cap U_j}$$

//

④ が一般の $\varphi : M \to N$ に対して成立すること

$$\begin{cases} p \in M \text{ のまわりの局所座標 } (x_1, \cdots, x_m) \\ \varphi(p) \in N \quad〃 \quad (y_1, \cdots, y_n) \end{cases}$$

$$\alpha = \sum \alpha_{i_1, \cdots, i_k}(y)\, dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k} \qquad N \text{ 上の } k\text{-form}$$

$$\varphi^* \alpha = \sum \varphi^* \alpha_{i_1 \cdots i_k} \cdot \varphi^*(dy_{i_1}) \wedge \cdots \wedge \varphi^*(dy_{i_k})$$

$\varphi^*(df) = d(\varphi^* f)$ は最初の方で示した

$$= \sum \underbrace{\varphi^* \alpha_{i_1 \cdots i_k}} \cdot \underbrace{d(\varphi^* y_{i_1}) \wedge \cdots \wedge d(\varphi^* y_{i_k})}$$

$$d(\varphi^* \alpha) \underset{③ と ②}{=} \sum \underline{d(\varphi^* \alpha_{i_1 \cdots i_k})} \wedge d(\varphi^* y_{i_1}) \wedge \cdots \wedge d(\varphi^* y_{i_k})$$

前に示した

$$= \sum \underline{\varphi^*(d\alpha_{i_1 \cdots i_k})} \wedge \varphi^*(dy_{i_1}) \wedge \cdots \wedge \varphi^*(dy_{i_k})$$

$$= \varphi^* \left(\sum d\alpha_{i_1 \cdots i_k} \wedge dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k} \right)$$

$$= \varphi^* (d\alpha) \qquad //$$